

# Schalenmodell-Approximation für drei Körper im Ausgangskanal

A. GRAUEL

Institut für Theoretische Physik der Universität Frankfurt (Main)

(Z. Naturforsch. 28 a, 185–205 [1973]; eingegangen 3. Nov. 1972)

## Shell-Model Approach for Three Body Final States

A scattering theory for reactions with three-particle channels above the two-particle threshold is developed. The  $R$ -matrix-technique is used for the calculation of the extended  $S$ -matrix. Correlated two-particle wave functions in the exit channels are employed to describe the exact two-particle continuum. For the usual shell model only a few partial waves dominate. The cross section depends on the energy-distribution between the two outgoing nucleons. Numerical results are presented for the model  $(d, 2n)$ -reaction exciting  $0^+$ -states in  $O^{16}$  without Coulomb-effects. The treatment is restricted to three  $(2p\ 2h)$ -states with the particles in the  $(sd)$ -shell and holes in the  $p$ -shell.

## I. Problemstellung

In der modernen Kernphysik liefert die Nukleonen-Streuung neben der Elektronen-Streuung ein wichtiges Hilfsmittel, Kernstrukturen zu untersuchen und insbesondere konzipierte Kernmodelle zu testen<sup>1</sup>. Eingeschränkt wird diese Möglichkeit dadurch, daß ein ins Kerninnere eindringendes Teilchen eine dauernde Änderung der inneren Struktur (inneres Bahn-Rearrangement) hervorruft. Abgesehen von dieser Schwierigkeit, darf die Behandlung der Ein-Nukleonen-Streuung als wohlbekannt vorausgesetzt werden. Die Behandlung der doppelten Nukleonen-Emission ist zudem ungleich schwieriger, da drei Koordinaten für das zweite Teilchen zusätzlich auftreten. Die Untersuchungen an solchen Kernreaktionen mit drei Ejektile sind von besonderem Interesse, weil sie Aufschluß geben können über den

Reaktionsverlauf (prompter Zerfall oder Stufenprozess) und über eine eventuelle Korrelation von Teilchenpaaren im Kontinuum. Solche Dreiteilchen-Reaktionen, die wir im Folgenden betrachten wollen, sind nicht mit den üblichen Methoden (beispielsweise der Lippmann-Schwinger-Gleichung) zu behandeln, weil diese zu Divergenzen in der Streuamplitude führen können<sup>2</sup>.

Die folgenden Graphen zeigen die wichtigsten Typen von Dreiteilchen-Reaktionen. Hierbei soll  $X$  das Target und  $Y$  den Restkern charakterisieren.  $a$  ist das Projektil und  $b_1, b_2$  bzw.  $b$  die Ejektile. Für Photonenanregung ist die Nukleonenlinie — sinngemäß durch die Photonenlinie — zu ersetzen. Abbildung 1a zeigt den allgemeinsten Prozeß mit drei Teilchen im Eingang und einer Fragmentierung in drei Bruchstücke.

Einen simultanen Zerfall eines Compoundkerns in drei Bruchstücke, hervorgerufen durch Nukleonen-

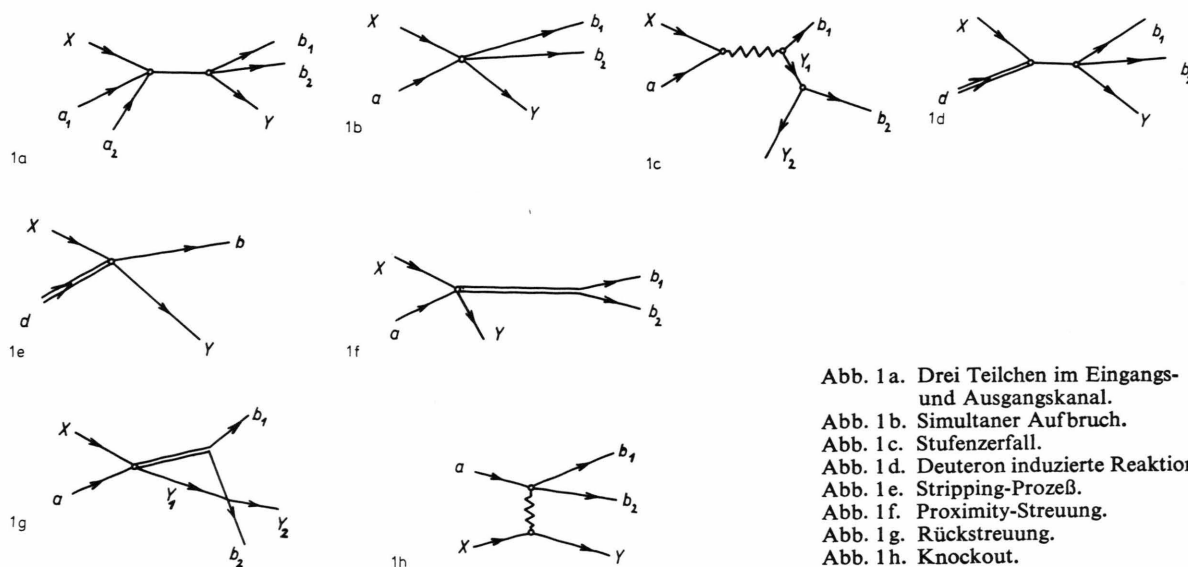


Abb. 1 a. Drei Teilchen im Eingangs- und Ausgangskanal.  
Abb. 1 b. Simultaner Aufbruch.  
Abb. 1 c. Stufenzerfall.  
Abb. 1 d. Deuteron induzierte Reaktion  
Abb. 1 e. Stripping-Prozeß.  
Abb. 1 f. Proximity-Streuung.  
Abb. 1 g. Rückstreuung.  
Abb. 1 h. Knockout.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Anregung, zeigt die Abbildung 1 b. Eine andere Zerfalls-Möglichkeit ist der Stufenzerfall (sequential decay) Abb. 1 c, bei dem ein angeregter Zwischenkern  $Y_1$  mit endlicher Lebensdauer gebildet wird. Dieser Zwischenzustand kann durch Emission eines zweiten Nukleons oder über eine  $\gamma$ -Kaskade seine Energie abgeben. Die Abb. 1 d zeigt den Zerfall des Compoundkerns durch eine von Deuteronen induzierte Reaktion, die wir später näher untersuchen werden.

Als Konsequenz der schwachen Bindungsenergie des Deuterons ist ein stripping-Prozess möglich. Hierbei dringt eines der Nukleonen in den Kern ein, während das andere Nukleon fast ungehindert die ursprüngliche Bahn beibehält (Abbildung 1 e). Dieses ist im wesentlichen ein direkter Prozess, für den eine  $R$ -Matrix-Berechnung von ROCK und GOLDFARB<sup>3</sup>, für kleine Einschussenergien und die Drehimpulse  $l = 0$  und 1, durchgeführt wurde. Die experimentelle Prüfung an der Reaktion  $D(d, p)H^3$  von GÜCKEL und Mitarbeiter<sup>4</sup> ergab, daß eine  $R$ -Matrix-Behandlung sinnvoll ist. Verlaufen die Teilchenbahnen im Ausgangskanal noch viele Kernradien vom Restkern entfernt parallel, so liegt der Fall einer *proximity scattering* vor (Abbildung 1 f). Im Falle einer *Rescattering* streut eines der Teilchen im Ausgang in den Bereich des Restkerns zurück und hinterläßt einen Endkern  $Y_2$  (Abbildung 1 g). Der hochenergetische, quasifreie *knockout*-Prozess (Abb. 1 h) streift ein oder mehrere relativ lose am Rumpf gebundene Teilchen ab. Beispielsweise, falls  $a$  eine Protonenlinie ist, kann  $b_1$  bzw.  $b_2$  ein Neutron oder Proton sein. Für die mathematische Lösung des quantenmechanischen Mehrteilchen-Streuproblems ist es in diesem Zusammenhang verständlich, zuerst nach passenden Koordinaten, mathematischen Methoden und Approximationen zu suchen, die der physikalischen Situation wohl angepaßt sind. Dazu beginnen wir mit dem Studium der Kinematik der Endfragmente, bestehend aus Restkern und einem, bzw. zwei Teilchen. Ein Kontinuumssteilchen nimmt die gesamte Kanalenergie  $E_{rel} = E - E_{CM} - E_{final}$  auf und bewegt sich relativ zum Restkern mit scharfem Impuls  $p = (2m E_{rel})^{1/2}$  und der Kanalkoordinate  $r$ . Die  $S$ -Matrix-Elemente lassen sich in dem üblichen Klassifikationsschema nach einem Satz von Quantenzahlen (dem Gesamtdrehimpuls, seiner Projektion, dem Kanalspin, dem Bahndrehimpuls des Teilchens etc.) spezifizieren. Für eine Fragmentierung in zwei Teilchen und Restkern ist die Situation grundsätzlich anders, weil sich die gesamte Kanalenergie  $E_{rel}$  in einer nicht definierten Verzweigung ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ) auf die beiden Teilchen aufteilt.  $\varepsilon_1$  bzw.  $\varepsilon_2$  überstreichen demnach einen kontinuierlichen Bereich innerhalb des Intervalls  $0 \leq \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix} \leq E_{rel}$  mit der Maßgabe, daß  $E_{rel} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  immer erfüllt ist (siehe Abbildung 3). Die asymptotische Gestalt der Streufunktion läßt sich

durch einen Produkt-Ansatz realisieren, der nach dem üblichen Schalenmodell naheliegend ist. In dieser Streufunktion besitzen die beiden Kontinuumssteilchen scharfe Impulse  $\hbar k_1$  und  $\hbar k_2$ . Andererseits überstreichen ihre Energien einen kontinuierlichen Bereich, so daß der Produktansatz keine passende Basis darstellt, weil zur Beschreibung eines physikalischen Zustandes ein Kontinuum von Kanälen notwendig ist. Wir sehen hier, daß das Schalenmodell-Konzept nicht kritiklos zu verwenden ist<sup>5</sup>. Nach diesem Modell bewegen sich die Nukleonen unabhängig voneinander in einem mittleren Potential analog einem Elektron unter dem Einfluß der bekannten elektrischen Kräfte, die der sehr viel schwerere Kern und die übrigen Elektronen auf das herausgegriffene Teilchen ausüben. Für die Bewegung eines Nukleons im Kern ist dieses sicher nicht zutreffend, da das Nukleon nur seine nächsten Nachbarn „sieht“ und sich deshalb im Feld dieser Nachbar-Nukleonen bewegt. Mit anderen Worten, die Nukleonen beeinflussen das Potential, in dem sie sich bewegen, sehr viel stärker als die Elektronen das ihrer Hülle. Aus diesem Grund sind die Fluktuationen vom mittleren Potential und die Korrelationen der Nukleonen untereinander von besonderem Interesse. Soll beispielsweise ein Teilchenaustausch berücksichtigt werden, dann ist dieses nur sinnvoll in einem Modell mit Teilchenkorrelationen zu erreichen<sup>6</sup>. Es wird deshalb der Kern als ein korreliertes Nukleonensystem betrachtet, wobei der Bewegung aller Nukleonen eine wichtige Rolle zukommt, dazu wird eine Radialkoordinate  $r = \left( \sum_{i=1}^2 r_i^2 \right)^{1/2}$

und eine Korrelationskoordinate  $\alpha = \arctg(r_2/r_1)$  eingeführt (die genaue Spezifikation erfolgt später im Text). In zweifacher Hinsicht ist dieses bedeutungsvoll: erstens erreichen wir Eindeutigkeit bezüglich der Anschlußbedingungen am Matching-Radius von Innen- und Außenraum-Lösung, und zweitens erreichen wir eine gewisse Analogie zu den Zweiteilchen-Reaktionen. Eine wichtige Folgerung zeigt, daß das Konzept nicht auf das Zweiteilchen-Kontinuum beschränkt ist, sondern auch Mehrteilchen-Kontinua adäquat behandelt werden können<sup>7</sup>. Die Aufgabe der zu entwickelnden Mehrteilchen-Streutheorie ist es, zur Energie  $E$  Streulösungen im gesamten Raumbereich und eine brauchbare Entwicklung für die Streumatrix zu finden. Dazu verschaffen wir uns eine diskrete Basis, nach der dann die tatsächlichen Wellenfunktionen entwickelt und die Streumatrix bestimmt wird. Prinzipiell gibt es dazu zwei Möglichkeiten dieses zu verwirklichen: Entweder man führt Randbedingungen ein, die zu einem diskreten Spektrum führen, oder man löst das Streuproblem mit einem effektiven Hamiltonoperator. Die Randbedingungen für die Dreiteilchen-Reaktionen können nun verschieden gewählt werden. Gehören sie zu auslaufenden Wellen, dann sind die Eigenwerte komplex und

energieabhängig. Reelle, energieunabhängige Randbedingungen,  $R$ -Matrix Randbedingungen<sup>8</sup> und Randbedingungen von asymptotisch richtigen Wellen zur Streuenergie  $E$ , wie sie in der Eigenkanal-Theorie (EKT) von DANOS, GREINER und WAHSEILER<sup>9,10</sup> benutzt werden, ergeben reelle Eigenwerte. Nur in der EKT ist ein kontinuierlicher Übergang der Streulösungen am Matching-Radius gegeben, allerdings ist die transzendente Gleichung  $E = E(\delta)$  zu lösen. Vermeidet man die Einführung von Kanalradien, so sind die Energieabhängigkeit und die komplexen Parameter implizit gegeben. Für einen effektiven Hamilton-Operator<sup>11</sup> ist der Antisymmetrisierung und der Teilchen-Umordnung besondere Aufmerksamkeit zu widmen. Insbesondere bedürfen auch die formalen Theorien, die den Hamiltonoperator aufteilen und phänomenologische Potentiale einführen, die Eingangs- und Endzustands-Wechselwirkungen berücksichtigen sollen, einer kritischen Betrachtung.

Diese Arbeit stellt einen ersten Versuch dar, bei Dreiteilchen-Reaktionen ohne die Einführung phänomenologischer Potentiale auszukommen. Das Zweiteilchen-Kontinuum berücksichtigen wir exakt durch korrelierte Basis-Wellenfunktionen. Zu diesem Zweck wird die  $R$ -Matrix für Dreiteilchen-Reaktionen eingeführt. Die Berechnung der  $S$ -Matrix im Rahmen eines Modells und damit der Partialquerschnitt für die Dreiteilchen-Phasenanalyse erfolgt dann über die  $R$ -Matrix-Technik. Die Korrelationskoeffizienten, gegenüber dem Modell unabhängiger Teilchen, werden explizit bestimmt. Maximaler Überlapp ergibt sich, falls die beiden Teilchen dieselben Quantenzahlen  $(l, j)$  haben. Für die Korrelation zwischen einem  $d_{5/2}$ - und einem  $d_{3/2}$ -Neutron aus der (sd)-Schale, folgt bei Berücksichtigung von vier radialen Quantenzahlen 77% und bei sieben 80% der Vollständigkeit. Für die Entwicklung des 2. und 3. Zustandes im Zweiteilchen-Kontinuum, erhalten wir 55% bzw. 56% und 51% bzw. 53%. Es ist hier zu sehen, daß eine geringe Zahl von Zuständen den Hauptbeitrag zur Vollständigkeit liefert. Weiterhin ist die sehr langsame Konvergenz festzustellen, die durch die Erhöhung der radialen Quantenzahlen zum Ausdruck kommt. Das Beispiel eines Oszillators mit zwei Teilchen zeigt, daß auch noch weit vom Kernrand (gegenüber dem Oszillator mit einem Teilchen) eine gewisse Aufenthaltswahrscheinlichkeit der beiden Teilchen vorhanden ist<sup>7</sup>. Es ist daraus zu folgern, daß eine Konvergenzverbesserung durch einen breiteren Randabfall (diffuses Randgebiet) im üblichen Schalenmodell, erreicht werden kann. Die Vollständigkeit für Teilchenpaare mit recht unterschiedlichen Konstituenten (beispielsweise (sd)-Teilchenpaar) fällt schlechter aus. In diesem Zusammenhang ist hier anzumerken, daß die Einteilchenfunktionen nicht zueinander orthogonal sein müssen, eine lineare Unabhängigkeit genügt. Die Er-

fassung solcher Anregungszustände wird durch ein nichtorthogonales Basissystem gelingen<sup>12</sup>. An dieser Stelle sei vermerkt, daß keine ernststen Schwierigkeiten bei der Konstruktion einer antisymmetrisierten Mehrteilchenwellenfunktion auftreten.

Zunächst wird in Kapitel II die Dynamik eines Dreikörperaufbruchs und das korrelierte Basissystem näher untersucht. Im Rahmen eines schematischen Modells wird in III eine Phasenanalyse durchgeführt und schließlich werden in Kapitel IV die notwendigen Erweiterungen auf ein realistisches Modell diskutiert.

## II. Zur Quantenmechanik des Dreikörper-Problems

Zunächst erscheint es notwendig, sich mit der Geometrie des Dreikörper-Problems vertraut zu machen. Die Lage dreier Körper ist eindeutig im Raum durch 9 Koordinaten definiert. Durch Abtrennung der Schwerpunktsbewegung reduziert sich ihre Zahl auf 6. Diese 6 Koordinaten können wie folgt gewählt werden: entweder wir benutzen die beiden Vektoren der Relativbewegung  $(r_1, \vartheta_1, \varphi_1)$  und  $(r_2, \vartheta_2, \varphi_2)$ , für die sich ein einfacher Ausdruck für die kin. Energie ergibt, oder wir führen drei Euler-Winkel für die Lage der drei Teilchen in Bezug auf ein raumfestes Achsenkreuz und drei Gestaltskoordinaten des Dreiecks ein, für deren Festlegung es drei Möglichkeiten gibt. Wählt man eine Länge und zwei Winkel, dann bleibt die Gestalt des Dreiecks ähnlich, und für die kin. Energie ergibt sich ein einfacher Ausdruck (Zickendraht<sup>13</sup>). Für die beiden anderen Möglichkeiten durch drei Längen bzw. zwei Längen und einen Winkel die Gestalt des Dreiecks festzulegen, ergeben sich keine einfachen Ausdrücke für die kinetische Energie<sup>14</sup>. Jedoch sei hier angemerkt, daß hier keines der drei Teilchen eine bevorzugte Rolle spielt (geeignet für Probleme, in denen entweder alle drei Teilchen gleich oder sehr verschieden sein können) bzw. zwei der drei Teilchen gegenüber dem dritten bevorzugt werden können.

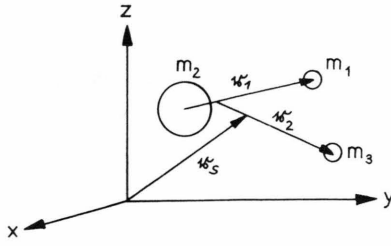
Wir verwenden die beiden Vektoren der Relativbewegung als Koordinaten, bei dem der Spezialfall enthalten ist, daß eines der drei Teilchen ausgezeichnet ist. Gilt

$$|\mathbf{r}_{m_1} - \mathbf{r}_{m_2}| \ll \left| \mathbf{r}_{m_3} - \frac{m_1 \mathbf{r}_{m_1} + m_2 \mathbf{r}_{m_2}}{m_1 + m_2} \right|,$$

dann ist das 3. Teilchen, wie wir später sehen werden, ausgezeichnet.

### a) Separation der Schwerpunktsbewegung

Die Relativkoordinaten und die Schwerpunktskoordinaten  $\mathbf{r}_5$  hängen von den Radiusvektoren  $\mathbf{r}_{m_1}$ ,  $\mathbf{r}_{m_2}$  und  $\mathbf{r}_{m_3}$  im Laborsystem zu den drei Massenpunkten  $m_1$ ,  $m_2$  und  $m_3$  ab. Der Radiusvektor  $\mathbf{r}_1$  zeigt von Teilchen 2 zur Masse von Teilchen 1,  $\mathbf{r}_2$  ist der Radiusvektor vom

Abb. 2 Definition der Koordinaten  $\{r_1, r_2, r_3\}$ .

Teil-Schwerpunkt, gebildet aus Masse 1 und 2, zum Teilchen 3. Der Radiusvektor  $r_s$  zeigt zum Gesamtschwerpunkt

$$r_1 = r_{m_1} - r_{m_2}, \quad (1)$$

$$r_2 = r_{m_3} - m_1/(m_1 + m_2) r_{m_1} - m_2/(m_1 + m_2) r_{m_2},$$

$$r_s = (m_1 r_{m_1} + m_2 r_{m_2} + m_3 r_{m_3})/M \quad \text{mit} \quad M = \sum_{i=1}^3 m_i.$$

Den wesentlichen Einfluß auf das Konvergenzverhalten, einer Entwicklung der Zweiteilchenbasis nach unkorrelierten Schalenmodell-Zuständen, hat die Wechselwirkung  $V(x_{m_1}, \dots, z_{m_3})$  der drei Teilchen untereinander. Wird angenommen, daß die Kraft zwischen den Teilchen 1 und 2, sowie 2 und 3 als Gradient eines Potentials dargestellt werden kann, das nur vom Abstand der Konstituenten abhängt, so ist eine einfache Separation wie folgt möglich

$$V(r_{m_1}, r_{m_2}, r_{m_3}) = \mathcal{V}_1(r_1) + \mathcal{V}_2(r_2) + \mathcal{V}(r_{12}). \quad (2)$$

$\mathcal{V}(r_{12})$  ist die zwischen Teilchen 1 und 3 wirksame Wechselwirkung. Damit ist aber eine exakte Abtrennung der Schwerpunktsbewegung möglich. Für die Schwerpunktsbewegung ergibt sich

$$H_{Sp} \varphi = E_{Sp} \varphi \quad \text{mit} \quad H_{Sp} = -\hbar^2/(2M) \Delta_{Sp} \quad (3a)$$

und für die Relativbewegung

$$H \Phi = \varepsilon \Phi$$

mit

$$\begin{aligned} H(r_1, r_2) &= -\hbar^2/(2\mu_1) \Delta_1 - \hbar^2/(2\mu_2) \Delta_2 + \{\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}\} \\ &= \sum_{i=1}^3 h_i + \sum_{i \neq j} \mathcal{V}(r_{ij}). \end{aligned} \quad (3b)$$

Die Funktion  $\varphi(r_{Sp})$  beschreibt die kräftefreie Schwerpunktsbewegung analog einem freien Teilchen mit der Masse  $M = m_1 + m_2 + m_3$ , dargestellt durch ein Wellenpaket der Form

$$\int |\varphi(r_{Sp})|^2 d\tau \quad \text{mit} \quad \varphi(r_{Sp}) = \int a(\mathbf{r}) \cdot a^{i\mathbf{r}} d^3 k.$$

Die reduzierten Massen sind wie folgt definiert (4)

$$\mu_1 = m_1 m_2/(m_1 + m_2) \quad \text{und} \quad \mu_2 = (m_1 + m_2) m_3/M.$$

#### b) Energiekorrelierte Zweiteilchen-Koordinaten

Die Energie der Relativbewegung im Dreiteilchen-Kanal ist die Differenz zwischen der totalen Kanalenergie  $E$  und der Schwerpunkts- und Endenergie des (A-2)-Teilchensystems

$$E_{rel} = E - E_{Sp} - E_{final}. \quad (5)$$

Diese Energie des kontinuierlichen Zweiteilchen-Spektrums wird von den beiden Kontinuumsenteilchen aufgenommen (Abbildung 3):

$$(\hbar k)^2/2m = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (6)$$

Eine elementare Umformung auf die Einteilchen-Impulse und die Einführung eines Energie-Korrelationswinkels  $\beta$  liefert die Einteilchen-Wellenzahlen

$$k_1 = (\mu_1/m)^{1/2} \cdot k \cdot \cos \beta \quad (7)$$

$$\text{und} \quad k_2 = (\mu_2/m)^{1/2} \cdot k \cdot \sin \beta.$$

Mit  $0 \leq \beta \leq (\pi/2)$  ist  $(k_1, k_2)$  in eindeutiger Weise  $(k, \beta)$  zugeordnet. Für den asymptotischen Bereich  $(r_1, r_2) > R_0$  (Kernradius) besteht eine Relation zwischen den Wellenzahlen von zwei freien Nukleonen

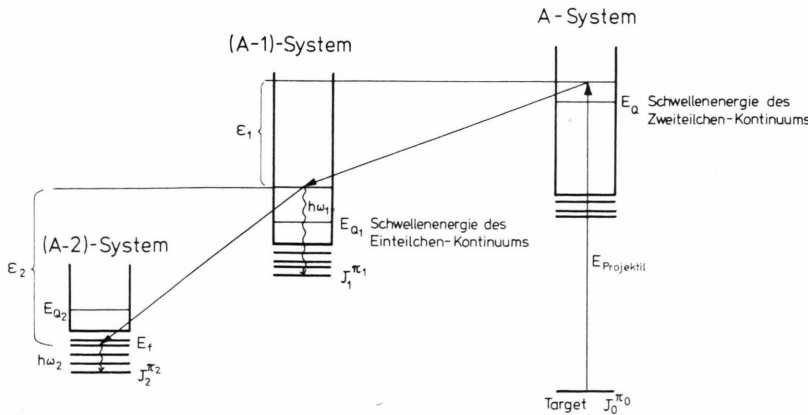


Abb. 3. Durch Teilchen- oder  $\gamma$ -Anregung wird das Target (Spin  $J_0$ , Parität  $\pi_0$ ) über die Zweiteilchen-Emissionsschwelle angeregt. Für einen prompten Zerfall ist erforderlich, daß die Energie des 2. Nukleons oberhalb der Schwellenenergie  $E_{01}$  im (A-1)-Teilchensystem zu liegen kommt. Die charakteristische Größe für einen prompten Dreiteilchen-Zerfall ist die Relativenergie  $E_{rel} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  im Dreiteilchen-Ausgangskanal. Angeregte Zustände des (A-1)- oder (A-2)-Systems können über  $\gamma$ -Strahlung ihre Energie abgeben.



$\{k_1, k_2\}$  und den Koordinaten  $\{r_1, r_2\}$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &\equiv \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{1/2} \frac{k_2}{k_1} = \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)^{1/2} = \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{1/2} \cdot \frac{v_2/t}{v_1/t} \\ &= \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{1/2} \frac{r_2}{r_1} \equiv \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \quad (8)$$

$r_1$  und  $r_2$  sind asymptotische Abstände vom Compoundkern und  $\alpha$  ist der Koordinaten-Korrelationswinkel. Die hier eingeführte Zeit  $t$  ist diejenige Zeit, die vergeht, bis beide Teilchen die Koinzidenz-Apparatur erreichen. Gleichung (8) ist korrekt, falls die Lebenszeit vom angeregten Kernzustand verglichen zur Flugzeit klein ist. Es zeigt sich hier, daß der Korrelationswinkel  $\beta$  weder von einer räumlichen Lokalisation noch einer bestimmten Konstellation der beiden Teilchen abhängt. Vielmehr übernimmt das Energie-Verhältnis ( $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ ) die zentrale Rolle. Es ist hier anzumerken, daß die Korrelation zwischen Intervallen von  $k_1$  und  $k_2$  nicht von  $r$  abhängt. Für die Relativkoordinaten folgt

$$r_1 = (m/\mu_1)^{1/2} r \cos \alpha \quad (9)$$

und

$$r_2 = (m/\mu_2)^{1/2} r \sin \alpha.$$

wobei  $m = \sqrt{m_1 m_2}$  die bewegte Masse im Dreiteilchenkanal ist. Die Dreiteilchenkoordinate  $r = [(\mu_1/m) r_1^2 + (\mu_2/m) r_2^2]^{1/2}$  charakterisiert die relative Bewegung im Dreiteilchenkanal, und der Koordinaten-Korrelationswinkel  $\alpha = \arctan [(\mu_2/\mu_1) \cdot (r_2^2/r_1^2)]^{1/2}$  zeigt an, mit welchem Gewicht die beiden Konstituenten  $r_1$  und  $r_2$  beteiligt sind. Mit anderen Worten,  $r_1$  und  $r_2$  sind keine unabhängigen Koordinaten, sie sind über  $\alpha$  miteinander verknüpft. Der Formalismus ist leicht auf das  $n$ -Teilchen-Kontinuum auszudehnen. Die kollektive Kanalkoordinate  $r$  charakterisiert die Bewegung von allen  $n$ -Teilchen, wobei der Radiusvektor  $r_1$  vom gemeinsamen Schwerpunkt zu einem individuellen zeigt. Die Korrelationswinkel  $\alpha_i$  verkoppeln alle  $r_i$  untereinander. Mit anderen Worten, das  $n$ -Teilchen-Kontinuum stellt ein gekoppeltes System dar.

Die einfache Transformation (9) zeigt schematisch Abbildung 4. Hier lassen sich sofort in dynamischer Hinsicht zwei Spezialfälle extrahieren

a) ist  $r_1$  beispielsweise die Relativkoordinate für ein Neutron und  $r_2$  entsprechend die für ein Proton, dann ergibt sich ein Clusterkanal für das Deuteron für  $r_1 = r_2 = (r/\sqrt{2})$ . Der Einschluß von solchen Clusterkanälen verlangt eine Superposition von korrelierten Wellenfunktionen mit einer großen Zahl von Korrelationsindices<sup>3</sup>  $n$ .

b) Falls  $r_1 \ll r_2$  oder  $r_2 \ll r_1$  ist, dann haben die beiden Teilchen sehr verschiedene Relativenergien. Für ein einfaches Deuteron bedeutet  $r_{\text{Neutron}} \ll r_{\text{Proton}}$  Neutroneneinfang mit auslaufenden Protonen, bzw.  $r_{\text{Neutron}} \gg r_{\text{Proton}}$  Protoneneinfang mit auslaufenden Neutronen.

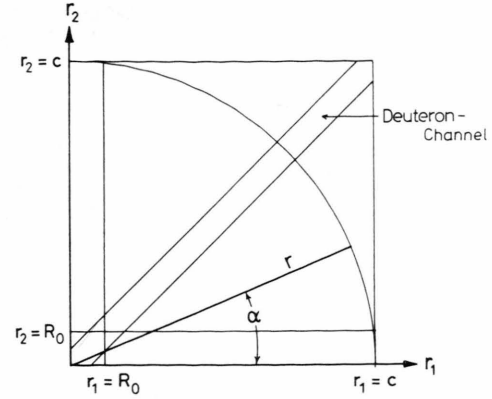


Abb. 4. Innerhalb des Intervalls  $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \pi$  ist der Korrelationswinkel  $\alpha$  eindeutig definiert. Die kollektive Dreiteilchen-Koordinate  $r$  legt bei  $r = c$  den Matching-Radius fest. Für die Kanalkoordinate  $r_1 = R_0$  bzw.  $c$  wird die Größe des Restkerns festgelegt bzw. der Matching-Radius für das Ein- teilchenkontinuum fixiert. Ist  $r_1 = r_2 = r/\sqrt{2}$ , so erhalten wir die Kanalkoordinate für ein Deuteron.

Mit anderen Worten, hier reicht die Anregungsenergie des Compoundsystems für einen Dreikörper-Aufbruch nicht aus – es kann zu einem Stufenzerfall kommen.

Wir behandeln hier zwei Neutronen im Kontinuum mit nicht sehr verschiedenen Energien im Ausgangskanal (simultaner Prozess), wobei der Fall einer proximity Streuung nicht betrachtet werden soll.

Für das Studium der Dynamik eines Dreikörper-Aufbruchs mit zwei Teilchen im Kontinuum, ist es zweckmäßig  $(r_1, r_2)$  in  $(r, \alpha)$  zu transformieren<sup>14-16</sup>. Damit wird eine Abtrennung der Wellenfunktion für die kollektive Dreiteilchen-Koordinate vom Korrelationsteil  $\alpha$  erreicht. Insbesondere ist damit die Eindeutigkeit der Matchbedingung am Anschlußradius gewährleistet. Für die folgenden Betrachtungen wird die Gültigkeit des Schalenmodells vorausgesetzt. Die einfachsten Kern-Potentiale  $\mathcal{V}_1$  und  $\mathcal{V}_2$  unter dessen Einfluß sich die Teilchen bewegen, sind ein konstantes Potential

$$\{\mathcal{V}_1 \text{ bzw. } \mathcal{V}_2\} = -V_0 \quad (10)$$

oder ein parabelförmiges Potential

$$\mathcal{V}_1(r_1) = -V_0 + \eta_1^2 r_1^2, \quad (11a)$$

$$\mathcal{V}_2(r_2) = -V_0 + \eta_2^2 r_2^2. \quad (11b)$$

Für gleiche Steifigkeit  $\eta_1 = \eta_2 = \eta$  des Parabelpotentials in  $r_1$ - bzw.  $r_2$ -Richtung folgt die einfache Form

$$\mathcal{V}_1(r_1) + \mathcal{V}_2(r_2) = -2V_0 \{1 - (r/R_0)^2\}. \quad (12)$$

Hierbei wurde  $\eta$  aus der Forderung bestimmt, daß am Kernrand  $r = R_0$  das Potential verschwindet. Im einfachsten Fall, kann der Wechselwirkungsterm  $\mathcal{V}(r_{12})$  durch eine Konstante approximiert werden. Für die

Schalenmodell-Beschreibung repräsentieren diese Potentiale eine sinnvolle Ausgangsbasis für das Vielteilchen-Problem<sup>7</sup>.

Mit einem Separationsansatz

$$\Phi(r, \alpha, \Omega_1, \Omega_2) = [R(r)/r^2] \cdot K(\alpha) \cdot W(\Omega_1, \Omega_2), \quad (13)$$

ist es möglich, die Relativbewegung im Dreiteilchen-Kanal von der Korrelation und dem Winkelanteil  $W(\Omega_1, \Omega_2) = Y_{l_1 m_1}(\theta_1 \varphi_1) \cdot Y_{l_3 m_3}(\theta_2 \varphi_2)$  zu trennen. Explizit folgt

$$(d^2 R/dr^2) + (1/r) (dR/dr) + \{k^2 - ((l_1 + l_3 + 2n + 2)/r)^2 - \tilde{\mathcal{V}}_1 - \tilde{\mathcal{V}}_2 - \tilde{\mathcal{V}}\} R = 0 \quad (14a)$$

und für den Korrelationswinkel  $\alpha$

$$\sin^{-2} \alpha \cos^{-2} \alpha \frac{d}{d\alpha} \left\{ \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \frac{dK}{d\alpha} \right\} - \left\{ \frac{l_1(l_1 + 1)}{\cos^2 \alpha} + \frac{l_3(l_3 + 1)}{\sin^2 \alpha} - [(l_1 + l_3 + 2n + 2)^2 - 4] \right\} K = 0. \quad (14b)$$

In diesen Koordinaten haben das Volumen- und Oberflächenelement die folgende Gestalt

$$dr = r^5 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \, d\alpha \, d\Omega_1 \, d\Omega_2,$$

$$dO = r^5 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \, d\alpha \, d\Omega_1 \, d\Omega_2.$$

Gleichung (14a) beschreibt die relative Bewegung in den energetisch positiven als auch energetisch negativen oder geschlossenen, energiekorrelierten Dreiteilchen-Kanälen für zwei ungeladene Nukleonen. Die Tilde über den Potentialen bedeutet eine Multiplikation mit  $(2m/\hbar^2)$ . Die explizite analytische Form von  $K_{l_1 l_3 n}$  aus Gl. (14b) sind bis auf einen Vorfaktor die bekannten Eigenfunktionen des symmetrischen Kreiseis<sup>5,7</sup>

$$K_{l_1 l_3 n}(\alpha) \quad (15)$$

$$= \left( \frac{2(l_1 + l_3 + 2n + 2)}{\sin 2\alpha} \right)^{1/2} \cdot d_{(1/2)(l_1 + l_3 + 1), (1/2)(l_1 - l_3)}^{(1/2)(l_1 + l_3 + 1) + n}(2\alpha).$$

$\alpha = \arctg(r_2/r_1)$  ist der oben eingeführte Koordinaten-Korrelationswinkel. Die diskreten Zahlen  $n$  für konstantes Energieverhältnis werden Korrelationszahlen genannt. Sinngemäß ist  $\alpha$  durch  $\beta = \arctg(\varepsilon_2/\varepsilon_1)^{1/2}$  für die Energiekorrelation zu setzen. Besondere Aufmerksamkeit verdient die Antisymmetrisierung in einer Schalenmodell-Theorie der Mehrteilchenreaktionen. Mit dem hier eingeführten Koordinatensatz, ergibt sie sich

$$\Phi_{l_1 l_3 n} = r^{-2} R_{l_1 l_3 n}(r) \left( \frac{l_1 + l_3 + 2n + 2}{\sin 2\alpha} \right)^{1/2} \times \{d_{\tau, \kappa}^{\tau+n}(2\alpha) [Y_{l_1 m_1}(\theta_1 \varphi_1) \otimes Y_{l_3 m_3}(\theta_2 \varphi_2)]_{m_L}^L - (-1)^{n-(l_1 + l_3 + L)} d_{\kappa, -\tau}^{\tau+n}(2\alpha) [Y_{l_1 m_1}(\theta_2 \varphi_2) \otimes Y_{l_3 m_3}(\theta_1 \varphi_1)]_{m_L}^L\}. \quad (17)$$

Die Integralform (ohne den Winkelanteil) für die Zweiteilchenfunktion, die für jeden Impuls gilt, insbesondere auch für einen diskreten Zweiteilchenimpuls  $\hbar k_p$ , veranschaulicht die Struktur der Teilchenkorrelation:

$$\Phi_{l_1 l_3 n; k_p}(r, \alpha) = (-1)^n k_p^2 / (2\pi) \int_0^\pi K_{l_1 l_3 n}^*(\beta) \cdot j_{l_1}(k_p \cos \beta r_1) j_{l_3}(k_p \sin \beta r_2) \sin^2 2\beta \, d(2\beta). \quad (18)$$

Die Energien der Einteilchenfunktionen  $j_{l_1}(k_1 r_1)$  und  $j_{l_3}(k_2 r_2)$  liegen innerhalb des Energieintervalls  $0 \leq \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \leq \varepsilon_p$ . Die Korrelationsfunktion  $K_{l_1 l_3 n}^*(\beta)$  korreliert die beiden Einteilchenfunktionen innerhalb

in einfacher Form. Es sei hier angemerkt, daß natürlich auch in analoger Weise das 3-Teilchen-, 4-Teilchen-Kontinuum etc. behandelt werden kann.

Die Gesamtfunktion

$$\Phi_{l_1 l_3 n} = r^{-2} R_{l_1 l_3 n}(r) \cdot K_{l_1 l_3 n}(\alpha) \cdot W_{l_1 l_3}(\Omega_1 \Omega_2) \quad (16)$$

die den Streuvorgang beschreibt, muß antisymmetrisch gegenüber der Vertauschung der Relativkoordinaten der beiden Teilchen sein, da eine antisymmetrisierte

Wellenfunktion im Innenbereich nur an eine antisymmetrische Außenraumfunktion angeschlossen werden kann. Es sind folgende Vertauschungsoperationen durchzuführen:

$$r_1 \rightarrow r_2, \quad r_2 \rightarrow r_1.$$

Hierbei läßt die Vertauschung den Gesamtschwerpunkt der drei Teilchen ungeändert. Der Permutationsoperator läßt die Koordinate  $r$  ungeändert, weil die Dreiteilchen-Koordinate eine homogen quadratische Funktion in den Koordinaten  $r_1$  und  $r_2$  ist. Der Koordinaten-Korrelationswinkel  $\alpha$  ist durch  $[(\pi/2) - \alpha]$  zu ersetzen, da nur für diese Transformation  $r_1$  in  $r_2$  und  $r_2$  in  $r_1$  übergeht. Für die Korrelationsfunktion folgt mit

$$\tau = \frac{1}{2}(l_1 + l_3 + 1) \quad \text{und} \quad \kappa = \frac{1}{2}(l_1 - l_3)$$

$$\tilde{K}_{l_1 l_3 n}(\alpha) = \left\{ \frac{l_1 + l_3 + 2n + 2}{\sin 2\alpha} \right\}^{1/2} \{d_{\tau, \kappa}^{\tau+n}(2\alpha) - (-1)^n d_{\kappa, -\tau}^{\tau+n}(2\alpha)\}.$$

Es ist leicht zu sehen, daß sich die Drehimpulsfunktionen nur um einen Phasenfaktor unterscheiden. Für Spin- und Isospin-Funktionen sind die entsprechenden Operationen ebenso leicht durchführbar. Insgesamt schreibt sich die Basis wie folgt:

des angegebenen Intervalls. Die Abb. (5.1) und (5.2) zeigen  $|K_{l_1 l_3 n}(\beta)|^2$ , für ein d- und ein (sd)-Teilchenpaar, die Korrelationsfunktion selbst ist eine stark veränderliche Funktion in Abhängigkeit von den Drehimpulsen  $l_1, l_3$  der Nukleonen und  $n$  (ist auch identisch der Knotenzahl innerhalb  $0 \leq \{\alpha, \beta\} \leq \frac{1}{2}\pi$ ). Sie korreliert Teilchenpaare mit Konstituenten aus verschiedenen

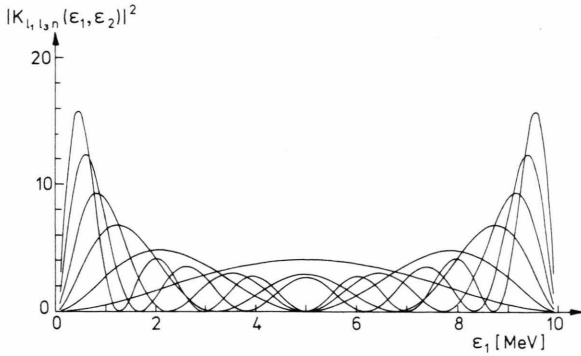


Abb. 5.1. zeigt Verteilungen  $|K_{22n}|$  der Korrelationsfunktion für ein d-Teilchenpaar bezüglich  $\epsilon_1 = \epsilon_2$ , wobei als Relativenergie  $E_{rel} (= \epsilon_1 + \epsilon_2) = 10 \text{ MeV}$  vorausgesetzt wurde. Mit wachsenden Korrelationszahlen  $n (= 0 \text{ bis } 5)$  erhalten wir rasch veränderliche Funktionen.

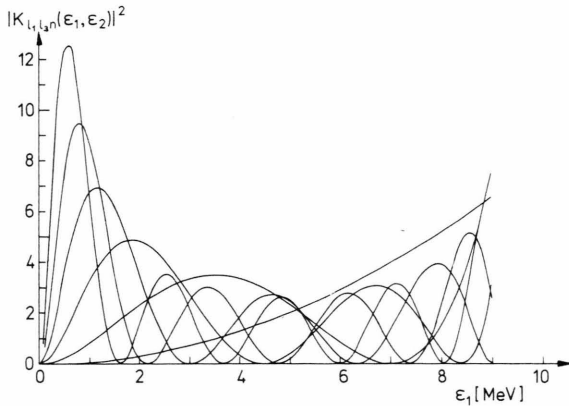


Abb. 5.2. Für ein (ds)-Teilchen ergeben sich asymmetrische Verteilungen. Die Korrelationsfunktion zeigt eine starke Abhängigkeit von den Drehimpulsen  $\{l_1, l_3\}$  und der Korrelationszahl  $n$ .

Energiebereichen. In der niedrigsten Ordnung mit  $n = 0$  ergeben sich keine Knoten innerhalb des Definitionsbereiches der Winkel. Bezüglich  $\{\alpha, \beta\} = \frac{1}{2}\pi$  (d.h.  $k_1 = k_2$ ) ergeben sich symmetrische Kurven für ein p-, d-Teilchenpaar etc. und leicht asymmetrische Kurven für ein (sd)- oder (dp)-Teilchenpaar. Im ersten Fall simuliert die Korrelationsfunktion einen Drehimpulsaustausch. Breite Verteilungen im  $k$ -Raum führen im

Ortsraum zu einer Lokalisation eines Teilchenpaares. Diese Lokalisation allein ist eine notwendige Bedingung für short range correlations (SRC), die hinreichend wird, falls sich die beiden Nukleonen in einem Wechselwirkungsvolumen von der Größenordnung  $(1.8 \text{ fm})^3$  aufhalten. Für ein (ds)-, bzw. (sp)-Teilchenpaar oder ähnlich, liegt das Maximum bei  $\beta = 0$  bzw.  $\beta = \frac{1}{2}\pi$ . Die Korrelationsfunktion hat an den Intervallgrenzen einen cosinus- bzw. sinusähnlichen Charakter. Da mit wachsendem  $n$  die Knotenzahl wächst, ergeben sich rasch veränderliche Funktionen, die zu langreichweitigen Komponenten, long range correlations (LRC), führen. Sind aus einem Koinzidenz-Experiment die Winkel- und Energie-Verteilung der beiden Kontinuums-teilchen bekannt, dann lassen sich über die Korrelationsfunktion Informationen über die Teilchenkorrelation gewinnen.

### c) Das Dreiteilchen-Kontinuum

Es soll hier gezeigt werden, daß der Formalismus mit mehrdimensionalen Kugelkoordinaten auf das Dreiteilchen- und  $n$ -Teilchen-Kontinuum ausgedehnt werden kann. Genau wie im Zweiteilchen-Kontinuum, ist auch hier die Relativenergie im Vierteilchen-Ausgangskanal  $E_{rel} = E - E_{CM} - E_{final}$  die charakteristische Größe. Diese Energie verteilt sich auf die drei Kontinuums-teilchen nach Maßgabe  $E_{rel} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$ . Für den Fall, daß die Wechselwirkung nur von den relativen Abständen abhängt, läßt sich die Schwerpunktsbewegung abseparieren. Der Hamilton-Operator für die relative Bewegung im Vierteilchen-Kanal hat die Form

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu_1} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2\mu_2} \Delta_2 - \frac{\hbar^2}{2\mu_3} \Delta_3 + \left\{ \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3 + \sum_{i \neq j} \mathcal{V}_{ij} \right\} = \sum_{i=1}^3 h_i + \sum_{i \neq j} \mathcal{V}_{ij},$$

wobei die reduzierten Massen wie folgt definiert sind

$$\mu_1 = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}, \quad \mu_2 = \frac{(m_1 + m_2) m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \\ \mu_3 = \frac{(m_1 + m_2 + m_3) m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

Durch eine Koordinatentransformation von  $(r_1, r_2, r_3)$  nach  $(r, \alpha_1, \alpha_2, \vartheta_1, \vartheta_2, \varphi_2)$  wird eine Abtrennung der Korrelation von der kollektiven Koordinate  $r$  erreicht. Die Transformationsgleichungen lauten

$$r_1 = r \cos \alpha_2 \cos \alpha_1, \quad r_2 = r \cos \alpha_2 \sin \alpha_1, \quad r_3 = r \sin \alpha_2.$$

Die kollektive Koordinate ist definiert durch  $r = (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^{1/2}$  und die Korrelationswinkel sind  $\alpha_1 = \arctg(r_2/r_1)$  und  $\alpha_2 = \arctg[r_3/(r_1^2 + r_2^2)^{1/2}]$ . Für den potentialfreien Fall  $(\Delta_{(1,2,3)} + k^2)\Phi = 0$ , erhalten

wir mit dem Produktansatz  $\Phi(r, \alpha_1, \alpha_2, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = R(r) \cdot K_1(\alpha_1) \cdot K_2(\alpha_2) \cdot W(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  folgende Gleichungen

$$\left\{ \frac{1}{r^8} \frac{d}{dr} \left( r^8 \frac{d}{dr} \right) + k^2 - \frac{C_1}{r^2} \right\} R(r) = 0, \quad (*)$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_1} \frac{d}{d\alpha_1} \left( \cos^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_1 \frac{dK_1}{d\alpha_1} \right) - \frac{l_1(l_1+1)}{\cos^2 \alpha_1} K_1 - \frac{l_2(l_2+1)}{\sin^2 \alpha_1} K_1 = -C_2 K_1,$$

$$\frac{1}{\cos^5 \alpha_2 \sin^2 \alpha_2} \frac{d}{d\alpha_2} \left( \cos^5 \alpha_2 \sin^2 \alpha_2 \frac{dK_2}{d\alpha_2} \right) - \frac{l_3(l_3+1)}{\sin^2 \alpha_2} K_2 - \frac{C_2 K_2}{\cos^2 \alpha_2} = -C_1 K_2.$$

Die Konstanten sind wie folgt definiert

$$C_1 = [l_1 + l_2 + l_3 + 2n_1 + 2n_2 + (7/2)]^2 - (7/2)^2, \quad C_2 = (l_1 + l_2 + 2n + 2)^2 - 4.$$

Mit der Transformation  $R = (\Phi/r^4)$  geht die Gleichung (\*) in eine gewohnte Form über

$$\Phi'' + \left\{ k^2 - \frac{[l_1 + l_2 + l_3 + 2n_1 + 2n_2 + (7/2)]^2 - (1/4)}{r^2} \right\} \Phi = 0$$

die uns gestattet die Lösungen sofort anzugeben:

$$F_{l_1 l_2 l_3 n_1 n_2} \cong J_{l_1 + l_2 + l_3 + 2n_1 + 2n_2 + (7/2)}(kr), \quad G_{l_1 l_2 l_3 n_1 n_2} \cong N_{l_1 + l_2 + l_3 + 2n_1 + 2n_2 + (7/2)}(kr).$$

Wir sehen hier, daß die Drehimpuls-Schwelle von den Drehimpulsen der beteiligten Teilchen und den Korrelationszahlen  $n_1$  und  $n_2$  abhängt. Die Lösungen  $K_1(\alpha_1)$  und  $K_2(\alpha_2)$  sind gegeben durch

$$K_1(\alpha_1) = \cos^{l_1} \alpha_1 \sin^{l_2} \alpha_1 {}_2F_1(-n_1, l_1 + l_2 + n_1 + 2, l_2 + \frac{3}{2}, \sin^2 \alpha_1),$$

$$K_2(\alpha_2) = \cos^{l_1 + l_2 + 2n_1 + (3/2)} \alpha_2 \sin^{l_3} \alpha_2 {}_2F_1(-n_2, l_1 + l_2 + 2n_1 + n_2 + \frac{7}{2}, l_1 + l_3 + 2n_1 + 3, \sin^2 \alpha_2).$$

Da  $r$  eine homogen quadratische Funktion ist, wirkt der Operator für Antisymmetrisierung  $\mathcal{A}$  nur auf die Korrelationskoordinaten. Für  $\alpha_1 \Rightarrow (\pi/2) - \alpha_1$  wird  $r_1 \rightarrow r_2$  und  $r_2 \rightarrow r_1$ . Für  $\alpha_2 \Rightarrow (\pi/2) - \alpha_2$  wird  $\tilde{r} \rightarrow r_3$  und  $r_3 \rightarrow \tilde{r}$ , wobei  $\tilde{r} = (r_1^2 + r_3^2)^{1/2}$  ist. Eine Verallgemeinerung dieser Überlegungen auf  $n$  Teilchen mit  $n > 3$  ist ohne Schwierigkeiten möglich.

### III. Schematisches Modell

Das einfachste Verfahren zur Behandlung von Streuproblemen ist die Born-Approximation, welche die Wirkung des streuenden Potentials als kleine Störung der Wellenfunktion auffaßt. Diese Näherung wird bestimmt vernünftig sein, falls die Verweilzeit  $R/v$  des Teilchens (oder Clusters) klein ist gegen die Zeit  $\hbar/V$ , währenddessen die Energie unscharf ist

$$(R/v) \ll (\hbar/V).$$

Hierbei ist  $R$  die Reichweite des Potentials der Stärke  $V$  und  $v$  die Teilchengeschwindigkeit. Mit anderen Worten, ihre Anwendung ist nur sinnvoll im Bereich großer Einschüßenergien. Für kleine Einschüßenergien ist es vorteilhaft, die Teilchen mit verschiedenen Drehimpulsen getrennt zu behandeln, weil man in den meisten Fällen durch Berücksichtigung der niedrigsten Drehimpulsen eine gute Näherung erzielt. Die ebene Dreiteilchenwelle mit dem Kanalimpuls  $\hbar k$  im Dreiteilchenkanal  $r$  verhält sich in der Nähe des Ursprungs wie

Hieraus ist zu folgern, daß sich die Lage des 1. Maximums mit wachsenden Drehimpulsen  $\{l_1, l_3\}$  und der Korrelationszahl  $n$  zu größeren Werten von  $kr$  verschiebt. Für das übliche Schalenmodell-Potential mit einer Reichweite  $R$ , liefern dann nur Partialwellen bis etwa  $l_1 + l_3 + 2n \cong kR$  einen wesentlichen Beitrag zur Phasenanalyse. Mit steigender Einschüßenergie sind die höheren Partialwellen nicht mehr zu vernachlässigen. Für kleine Einschüßenergien erscheint es vernünftig, eine Phasenanalyse der Reaktionsprodukte durchzuführen. Die Definition der  $S$ -Matrix wird hier allgemeiner aufgefaßt. Von einer Parametrisierung der  $S$ -Matrix ist zu fordern

- a) die Unitarität soll nicht verletzt werden,
- b) die Parameter sollen nicht explizit energieabhängig werden und
- c) künstliche Annahmen, wie die Einführung von Wechselwirkungsradien etc. sollen vermieden werden.

$$\exp \{i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1 + \mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2)\} \sim \frac{J_{l_1 + l_3 + 2n + 2}(kr)}{(kr)^2} \xrightarrow{(kr) \rightarrow 0} \frac{(kr)^{l_1 + l_3 + 2n}}{2^{l_1 + l_3 + 2n + 2} [l_1 + l_3 + 2n + 2]}.$$



a) Streumatrix und Wirkungsquerschnitt für multiplen Aufbruch

Für einen Prozeß mit einem Zweiteilchen-Eingangskanal  $c$  (die gestrichelten Indices beziehen sich auf die Streukanäle) folgt

$$\Psi_c = I_c \varphi_c - \sum_{c'} S_{cc'} O_{c'} \varphi_{c'}. \quad (1)$$

Die Anteile  $I_c$  und  $O_c$  sind ein- und auslaufende Wellen und enthalten nur die Radialabhängigkeit. Die Kanalwellenfunktion  $\varphi$  enthält alle Winkel- und Spin-Anteile. Wird durch das einfallende Teilchen soviel Energie übertragen, so daß nach einer ersten Teilchenemission der Restkern hochangeregt zurückbleibt, dann kann nach einem Rearrangement mit einer weiteren Teilchenemission gerechnet werden. Die Wellenfunktion hat dann die asymptotische Gestalt

$$\Psi_c = I_c \varphi_c - \sum_{c_1'} S_{cc_1'}(\varepsilon_1) \cdot O_{c_1'} \varphi_{c_1'} - \sum_{c_1', c_2'} \int d\varepsilon_2' \cdot S_{c_1' c_2'}(\varepsilon_2') O_{c_2'} \varphi_{c_2'}. \quad (2)$$

Hierbei bedeutet  $\sum$  Summation über die diskreten Quantenzahlen und  $\int$  Integration über die kontinuierliche Variable  $\varepsilon_2$ . Der Partialquerschnitt für diesen Stufenzerfall ist<sup>8</sup>

$$(\mathrm{d}\sigma_{c,c_2'}/\mathrm{d}\varepsilon_2) = (\pi/k_c^2) \sum_{s,l,j,s',l'} g_J \cdot |S_{c_1' c_2'}(\varepsilon_2')|^2. \quad (3)$$

Für einen prompten Zerfall ergibt sich die asymptotische Gestalt der Streufunktion aus einer Überlagerung ein- und auslaufender Wellen in den Zweiteilchenkanälen  $c$  und den Dreiteilchenkanälen  $\alpha$

$$\Psi = \sum_c \{A_c I_c + B_c O_c\} \varphi_c + \sum \int d\varepsilon \{A_\alpha(\varepsilon) \cdot I_\alpha(\varepsilon) + B_\alpha(\varepsilon) \cdot O_\alpha(\varepsilon)\} \varphi_\alpha. \quad (4)$$

$\sum$  bedeutet eine Summation über die diskreten Dreiteilchenquantenzahlen und  $\int$  eine Integration über die kontinuierliche Variable  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ . Die Amplituden der Dreiteilchenwellen sind, ebenso wie die der Zweiteilchenwellen nicht unabhängig voneinander, sondern durch die  $S$ -Matrix verknüpft. Mit anderen Worten, die  $S$ -Matrixelemente hängen von der gewählten Darstellung ab. Nun ist eine Abhängigkeit der  $S$ -Matrix von einem kontinuierlichen Parameter  $\varepsilon$  nicht zweckmäßig, weil zur Darstellung eines Zustandes eine große Zahl von Einteilchenzuständen ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ) notwendig ist. Dieses ist leicht zu deduzieren, falls die Dreiteilchenwelle  $I(\varepsilon)$  oder  $O(\varepsilon)$  durch einen Produktansatz zweier ebener Wellen, zugehörig zu  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ , realisiert werden soll. Nach dem Vorangegangenen überstreichen nämlich  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  einen kontinuierlichen Bereich innerhalb des Intervalls  $0 \leq \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \leq \varepsilon$ . Zur Beschreibung wird

deshalb als passende Basis nicht ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ), sondern die Energie der Relativbewegung im Dreiteilchenkanal  $\varepsilon$  gewählt. Formal schreibt sich die Streufunktion

$$\Psi = \sum_c \{A_c I_c + B_c O_c\} \varphi_c + \sum_r \{A_r I_r + B_r O_r\} \varphi_r. \quad (5)$$

$c$  hat dieselbe Bedeutung wie oben und  $r$  charakterisiert einen physikalischen Dreiteilchenkanal.  $I, O$  und  $\varphi$  haben dieselbe Bedeutung wie oben schon erläutert.  $\varphi_r$  enthält außerdem noch eine Oberflächenfunktion (ihre genaue Spezifikation erfolgt später). Ein Prozeß mit einem Eingangskanal  $c$  läuft mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit, die proportional dem Quadrat des entsprechenden  $S$ -Matrixelements ist, in einem Zweiteilchenkanal  $c'$  oder Dreiteilchenkanal  $r'$  ab. Für einen Eingangskanal  $c$  folgt

$$\Psi_c = I_c \varphi_c - \sum_{c'} S_{c'c} O_{c'} \varphi_{c'} - \sum_{r'} S_{r'c} O_{r'} \varphi_{r'}. \quad (6)$$

entsprechend für einen Dreiteilchenkanal  $r$

$$\Psi_r = I_r \varphi_r - \sum_{c'} S_{c'r} O_{c'} \varphi_{c'} - \sum_{r'} S_{r'r} O_{r'} \varphi_{r'}. \quad (7)$$

Durch Superposition aller Partialwellen, mit gewissen Amplituden  $A$ , ist die allgemeinste Streufunktion zu erhalten:

$$\Psi = \sum_c A_c \Psi_c + \sum_r A_r \Psi_r; \quad (8)$$

wird (6), (7) in (9) eingesetzt und fassen wir die zum gleichen Kanal gehörigen Anteile zusammen, dann ergibt sich durch Koeffizientenvergleich mit (5)

$$B_c = - \sum_{c'} S_{cc'} A_{c'} - \sum_{r'} S_{cr'} A_{r'}, \quad (9)$$

$$B_r = - \sum_{c'} S_{rr'} A_{c'} - \sum_{r'} S_{r'r} A_{r'}.$$

	$c'$	$v'=1$	$v'=2$
$c$	$S_{cc'}$	$S_{c1'}$	$S_{c2'}$
$v=1$	$S_{1c'}$	$S_{11'}$	$S_{12'}$
$v=2$	$S_{2c'}$	$S_{21'}$	$S_{22'}$

Abb. 6 Die ausgedehnte  $S$ -Matrix für das Einteilchen-Kontinuum und einen prompten Dreiteilchen-Zerfall. (Das  $v$  in der Abbildung entspricht dem  $r$  im Text!)

Die ausgedehnte  $S$ -Matrix hat dann eine Struktur wie sie Abb. 6 zeigt. Der einfachste denkbare Fall einer Dreikörperstreuung an einem Zentralpotential ist die elastische Streuung für zwei Teilchen ohne Spin und Ladung. Die Schrödinger-Gleichung für diesen Fall hat eine modifizierte Drehimpulsbarriere

$$\{(l_1 + l_3 + 2n + 2)^2 - \frac{1}{4}\} \cdot (1/r^2)$$

und die Lösungen selbst lauten

$$q(r) = r^{1/2} J_{l_1 + l_3 + 2n + 2}(kr)$$

bzw. für negative kinetische Energie

$$I_{l_1+l_3+2n+2}(kr) \quad \text{mit} \quad k = \hbar^{-1} (2m [\mathcal{E} - \mathcal{U}])^{1/2}$$

wobei  $\mathcal{U}$  das gesamte Potential einschließlich des Zentrifugalterms darstellt. Für große Abstände vom Streuzentrum ist die ebene Welle im Dreiteilchenkanal für ein neutrales Teilchenpaar  $\exp \{i(\xi_1 r_1 + \xi_2 r_2)\}$  die Lösung der kräftefreien Schrödinger-Gleichung.

$$\begin{aligned} & \exp \{ikr (\cos \alpha \cos \beta \cos \vartheta_1 + \sin \alpha \sin \beta [\cos \Theta \cos \vartheta_2 + \sin \Theta \sin \vartheta_2 \cos \varphi_2])\} \\ &= [(2\pi)^{3/2}/(kr)^{5/2}] \cdot \sum_{l_1, l_3, n} (-)^n i^{l_1+l_3} (2l_1+1)^{1/2} (2l_3+1)^{1/2} K_{l_1 l_3 n}(\alpha) K_{l_1 l_3 n}(\beta) \\ & \quad \cdot \sum_{m_3=0}^{l_3} Y_{l_1 0}(\vartheta_1) Y_{l_3 -m_3}(\Theta \Phi) Y_{l_3 m_3}(\vartheta_2 \varphi_2) \cdot [I_{\tilde{L}} - O_{\tilde{L}}], \end{aligned}$$

$$\text{mit} \quad I_{\tilde{L}} = O_{\tilde{L}}^* = \exp \{-i[kr - (\pi/2)(l_1 + l_3 + 2n + (3/2))]\}.$$

$\vartheta_1$  und  $\varphi_1$  legen die Richtung des Radiusvektors vom Target nach  $\mu_1$  fest, ohne Verletzung der Allgemeinheit kann  $\varphi_1 = 0$  gesetzt werden. Entsprechend wird der Radiusvektor vom Target nach  $\mu_2$  durch die Winkel  $\vartheta_2$  und  $\varphi_2$  festgelegt.  $k_1$  ist der relative Impuls zwischen den zwei reduzierten Massen  $\mu_1$  und  $\mu_2$ . Das Koordinatensystem ist dabei so gelegt, daß  $k_1$  parallel zur z-Richtung zu liegen kommt.  $k_2$  ist der Impuls, mit dem sich der Schwerpunkt, gebildet aus  $\mu_1$  und  $\mu_2$ , relativ zur Targetmasse bewegt. Die Winkel  $\Theta$  und  $\Phi$  legen seine Richtung fest. Die einfallende ebene Dreiteilchenwelle verursacht am Target eine Streuwelle, die ebenfalls als Überlagerung von Wellen mit verschiedenen  $\{l_1, l_3, n\}$  dargestellt werden kann. Wird für das Potential Kugelsymmetrie angenommen, dann kann es keine Übergänge in  $\{l_1, l_3, n\}$  verursachen. Wegen der Entartung von  $\{l_1, l_3, n\}$  bei  $l_1 = l_3$  gibt es einen Drehimpulsaustausch. Für die gesamte Wellenfunktion folgt

$$\text{damit} \quad \Psi = \Psi_{\text{inc}} + \Psi_{\text{reac}}. \quad (11)$$

Wesentlich ist, daß die Streuamplitude nicht nur für den elastischen Fall, sondern auch für den inelastischen Fall proportional dem entsprechenden S-Matrixelement und der Korrelationsfunktion  $K_{l_1 l_3 n}(\arctg \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1})$  ist. Damit kommt die explizite Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes von der Korrelationsfunktion zum Ausdruck.  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  sind die kinetischen Energien der beiden auslaufenden Nukleonen relativ zum verbleibenden Restkern. Nach diesen Vorbemerkungen wird nun der Wirkungsquerschnitt für einen inelastischen Prozeß formuliert. Zur Charakterisierung dieser Situation ist ein Satz von Quantenzahlen notwendig  $\{r, \Sigma, \mu_\Sigma\}$ .  $r$  spezifiziert den Dreiteilchenkanal mit den intrinsischen Projektil- und Target-Quantenzahlen,  $\Sigma$  ist der Kanalspin und  $\mu_\Sigma$  seine Projektion. Die allgemeine Wellenfunktion für einen Kanal  $r$  mit dem Kanalspin  $\Sigma$  ist im asymptotischen Bereich durch eine Superposition von ein- und auslaufenden Kugelwellen darstellbar

$$\Psi_{r\Sigma}^{JM} = [A_{r\Sigma}^{JM} \exp \{-i(k_r r_r - (\pi/2)\tilde{L})\} + B_{r\Sigma}^{JM} \exp \{i(k_r r_r - (\pi/2)\tilde{L})\}] (k_r r_r)^{-5/2} v_r^{-1/2} \tilde{\mathcal{Y}}_{JL\Sigma}^M \Phi_{r\Sigma}. \quad (12)$$

Hierbei berücksichtigt  $\Phi_{r\Sigma}$  im wesentlichen den Ladungszustand des (A-2)-Teilchensystems und der beiden Teilchen. Die Funktion  $\tilde{\mathcal{Y}}_{JL\Sigma}^M$  hat folgende Gestalt

$$\tilde{\mathcal{Y}}_{JL\Sigma}^M = \sum_{\mu_\Sigma} (L \Sigma J | M - \mu_\Sigma \mu_\Sigma M) \mathcal{Y}_{L, M-\mu_\Sigma} \Psi_{J_n \mu_\Sigma}^{\Sigma \mu_\Sigma} \tilde{K}_{l_1 l_3 n}(\alpha) \tilde{K}_{l_1 l_3 n}(\beta). \quad (13)$$

Die Kanalspinfunktion  $\Psi_{J_n \mu_\Sigma}^{\Sigma \mu_\Sigma}$  ist durch folgendes Kopplungs-Schema definiert

$$\Psi_{J_n \mu_\Sigma}^{\Sigma \mu_\Sigma} = [J_h \otimes (s_1 \otimes s_2)_{m_\Sigma}^\Sigma]_{\mu_\Sigma}^\Sigma.$$

wobei  $J_h$  den Targetspin und  $s$  der Gesamtspin des Projektils ist.  $\mathcal{Y}_{L, m_L}$  ist die Funktion zum Gesamtdrehimpuls  $L$  der beiden Teilchen und ist erklärt durch:

$$\mathcal{Y}_{L, m_L} = [l_1 \otimes l_3]_{m_L}^L.$$

Mit dieser Spinabhängigkeit für die einfallende Welle im Kanal  $r$ , folgt für den asymptotischen Bereich

$$\begin{aligned} & \exp \{ik_r r_r [(\cos \alpha \cos \beta \cos \vartheta_1 + \sin \alpha \sin \beta (\cos \Theta \cos \vartheta_2 + \sin \Theta \sin \vartheta_2 \cos \varphi_2))]\} \Psi_{J_n \mu_\Sigma}^{\Sigma \mu_\Sigma} \Phi_{r\Sigma} \\ &= i \pi^{3/2} \left( \frac{2}{k_r r_r} \right)^{5/2} \sum_{l_1, l_3, n} (-)^n i^{l_1+l_3} \frac{1}{2} (2l_1+1)^{3/2} (2l_3+1)^{1/2} \sum_{m_3=0}^{l_3} Y_{l_3, -m_3}(\Theta \Phi) \sum_{L=|l_1-l_3|}^{l_1+l_3} \sum_{m_L=-L}^{L+\Sigma} \sum_{J=L-\Sigma}^{L+\Sigma} \sum_{M=-J}^J \\ & \quad (O m_3 m_L | l_1 l_3 L) (m_L \mu_\Sigma M | L \Sigma J) \{I_{\tilde{L}} - O_{\tilde{L}}\} \tilde{\mathcal{Y}}_{JL\Sigma}^M \Phi_{r\Sigma}. \end{aligned} \quad (14)$$

Hierbei wurde als Abkürzung  $\tilde{L} = l_1 + l_3 + 2n + \frac{3}{2}$  (Kanal-Zahl) eingeführt. Die Reaktionswelle  $\Psi_{\text{reac}} = \Psi - \Psi_{\text{inc}}$  läßt sich aus den Gl. (12) und (14) berechnen. Über die physikalische Forderung, daß die Reaktionswelle keine einlaufenden Wellen hat, werden zunächst die unbekannten Koeffizienten  $A_{r\Sigma L}^{JM}$  zu

$$A_{r\Sigma L}^{JM} = i(2\pi)^{3/2} k_r^{-5/2} v_r^{1/2} \sum_{\substack{l_1, l_3, n \\ m_3, L, m_L, J, M}} (-)^n i^{l_1+l_3} (2l_3+1)^{3/2} (2l_1+1)^{1/2} (0 m_3 m_L | l_1 l_3 L) \cdot (m_L \mu_\Sigma M | L \Sigma J) \cdot Y_{l_3, -m_3}(\Theta \Phi)$$

bestimmt.

Die S-Matrix legt die Koeffizienten  $B_{r\Sigma L}^{JM}$  fest

$$B_{r\Sigma L}^{JM} = - \sum_{r', \Sigma', L'} S_{r'\Sigma' L', r\Sigma L}^{JM} A_{r\Sigma L}^{JM}.$$

Für die Reaktionswelle ergibt sich dann die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{reac}} = & i(2\pi)^{3/2} k_r^{-5/2} \sum_{\substack{l_1, l_3, n \\ L, m_L, J, M, m_3}} (-)^n i^{l_1+l_3} (2l_1+1)^{3/2} (2l_3+1)^{1/2} (0 m_3 m_L | l_1 l_3 L) (m_L \mu_\Sigma M | L \Sigma J) Y_{l_3, -m_3} \\ & \cdot (v_r/v_r')^{1/2} \sum_{\substack{r', \Sigma', L' \\ m_L', \mu_\Sigma', m_{L1}', m_{L3}'}} (L' \Sigma' J | m_L' \mu_\Sigma' M) (l_1' l_3' L' | m_{L1}' m_{L3}' m_L') \tilde{K}_{l_1' l_3' n'}(\alpha) \tilde{K}_{l_1' l_3' n'}(\beta) \cdot r_r^{-5/2} \\ & \cdot \exp \{i [k_r' r_r' - (\pi/2) (l_1' + l_3' + 2n' + \frac{3}{2})]\} Y_{l_1' m_{L1}'} Y_{l_3' m_{L3}'} \cdot \{\delta_{r'r} \delta_{\Sigma'\Sigma} \delta_{L'L} - S_{r'\Sigma' L', r\Sigma L}\} \Psi_{J_{h'} s_{13}'}^{\Sigma' \mu_\Sigma'} \Phi_{r'\Sigma'}. \end{aligned} \quad (15)$$

Andererseits ist aus physikalischen Überlegungen die Streuwelle wie folgt anzusetzen

$$\Psi_{\text{reac}} = i k_r^{-5/2} \sum_{\mu_\Sigma} (v_r/v_r')^{1/2} r_r^{-5/2} \exp \{i k_r' r_r'\} Q_{r'\Sigma' \mu_\Sigma', r\Sigma \mu_\Sigma} \Psi_{J_{h'} s_{13}'}^{\Sigma' \mu_\Sigma'} \Phi_{r'\Sigma'}. \quad (16)$$

Durch Vergleich beider Formen (15) und (16), folgt für die Streuamplitude

$$\begin{aligned} Q_{r'\Sigma' \mu_\Sigma', r\Sigma \mu_\Sigma} = & (2\pi)^{3/2} \sum_{\substack{l_1, l_3, n \\ L, m_L, J, M, m_3, L', m_{L1}', m_{L3}'}} (-)^{n'} i^{l_1+l_3-(l_1'+l_3')} (2l_1+1)^{3/2} (2l_3+1)^{1/2} \tilde{K}_{l_1' l_3' n'}(\alpha) \tilde{K}_{l_1' l_3' n'}(\beta) \\ & \cdot (0 m_3 m_L | l_1 l_3 L) (m_L \mu_\Sigma M | L \Sigma J) (L' \Sigma' J | m_L' \mu_\Sigma' M) \\ & \cdot (l_1' l_3' L' | m_{L1}' m_{L3}' m_L') (\delta_{r'r} \delta_{\Sigma'\Sigma} \delta_{\mu_\Sigma' \mu_\Sigma} - S_{r'\Sigma' \mu_\Sigma', r\Sigma \mu_\Sigma}) \cdot Y_{l_1' m_{L1}'} Y_{l_3' m_{L3}'}. \end{aligned} \quad (17)$$

Alle ungestrichenen Größen beziehen sich auf den Eingangskanal, die gestrichenen auf den Ausgangskanal. Die funktionale Abhängigkeit der Reaktionsamplitude  $Q_{r', \dots, r}$  von der Korrelationsfunktion  $K_{l_1' l_3' n'}(\beta)$  stellt eine explizite Energiekorrelation zwischen den beiden Teilchen im Ausgangskanal her. Der differentielle Wirkungsquerschnitt, für einen Prozeß mit zwei auslaufenden Teilchen, ist das Verhältnis des Streustromes in das Raumwinkelement  $d\Omega_{\text{hyp}}$  zum einfallenden Gesamtstrom

$$d\sigma_{r'\Sigma' \mu_\Sigma', r\Sigma \mu_\Sigma} = \lambda^2 |Q_{r'\Sigma' \mu_\Sigma', r\Sigma \mu_\Sigma}|^2 \cdot d\Omega_{\text{hyp}}. \quad (18)$$

Das Raumwinkelement ist festgelegt durch

$$d\Omega_{\text{hyp}} = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha d\alpha d\Omega_1 d\Omega_2.$$

Charakteristisch für den WQ ist, außer der Winkelverteilung der beiden auslaufenden Nukleonen, die Energiekorrelation der beiden Teilchen. Tragen ein oder beide Teilchen eine Ladung, dann sind die entsprechenden Coulomb-Wellen<sup>4,7</sup> zu benutzen. Da jeder Wert  $\Sigma$  des Kanalspins sich auf  $(2\Sigma+1)$  Arten im Raum orientieren kann, folgt für den partiellen WQ für eine Reaktion  $r\Sigma \rightarrow r'\Sigma'$

$$\begin{aligned} & \frac{d^3 \sigma_{r'\Sigma' r\Sigma}}{(d\Omega_1 d\Omega_2 d\alpha)_{r'\Sigma'}} \\ & = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \frac{\lambda^2}{2\Sigma+1} \sum_{\mu_\Sigma, \mu_\Sigma'} |Q_{r', \dots, \mu_\Sigma}|^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Mit der asymptotischen Bedingung für die Korrelationswinkel  $\tan \alpha = \tan \beta$  folgt für den Anteil des Raumwinkelementes, das von  $\alpha$  abhängt

$$\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{\varepsilon_1 (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^{1/2} d\varepsilon_2}{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^3}.$$

$\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  sind die Relativenergien für die doppelte Nukleonenemission, ihre Summe ist gleich der Relativenergie  $E_{\text{rel } 0}$  im Dreiteilchenkanal. Andererseits kann die Energie im Ausgangskanal durch die Anregungsenergie  $E_d$  und den  $Q$ -Wert ausgedrückt werden  $E_{\text{rel } 0} = E_d - Q$ . Damit ist es möglich,  $\varepsilon_1$  zu eliminieren. Für eine Energiediskriminierung nach der Energie des zweiten Teilchens folgt

$$\frac{d\sigma_{r'\Sigma' r\Sigma}}{d\Omega_1 d\Omega_2 d\varepsilon_2} = \tilde{T}(E_d, \varepsilon_2) \cdot \frac{\lambda^2}{2\Sigma+1} \cdot \sum_{\mu_\Sigma, \mu_\Sigma'} |Q_{r', \dots, \mu_\Sigma}|^2 \quad (20)$$

mit

$$\tilde{T}(E_d, \varepsilon_2) = \frac{(E_d - Q - \varepsilon_2) (\varepsilon_2 \{E_d - Q - \varepsilon_2\})^{1/2}}{2(E_d - Q)^3}. \quad (\text{Fig. 6})$$

Ist eine Diskriminierung nach  $\varepsilon_2$  nicht möglich, dann wird über diesen Freiheitsgrad integriert. Mit der Orthogonalitätsrelation für die Funktionen  $K_{l_1' l_3' n'}(\alpha)$ , folgt für den differentiellen WQ pro Raumwinkel-

element  $d\Omega_1 d\Omega_2$

$$\frac{d\sigma_{r', \Sigma', r \Sigma}}{(d\Omega_1 d\Omega_2)_{r', \Sigma'}} = \frac{\kappa_r^2}{2\Sigma + 1} \sum_{\mu_\Sigma, \mu_{\Sigma'}} |T_{r', \Sigma', r \Sigma \mu_\Sigma}|^2 \quad (21)$$

mit

$$T_{r', \dots, \mu_\Sigma} = (2\pi)^{3/2} \sum_{QZ} (-)^n i^{l_1 + l_3 - (l_1' + l_3')} (2l_1 + 1)^{3/2} (2l_3 + 1)^{1/2} \tilde{K}_{l_1' l_3' n'} (\arctg \{(\varepsilon_2/\varepsilon_1)\}^{1/2}) \cdot$$

$$\cdot (0 m_3 m_L | l_1 l_3 L) (m_L \mu_\Sigma M | L \Sigma J) (l' \Sigma' J | m_{l'} \mu_{\Sigma'} M) (l_1' l_3' L' | m_{l_1'} m_{l_3'} m_{L'})$$

$$\cdot \{\delta_{r'r} \delta_{\Sigma'\Sigma} \delta_{L'L} - S_{r' \Sigma' L', r \Sigma L}\} Y_{l_1' m_{l_1'}} Y_{l_3' m_{l_3'}}.$$
(22)

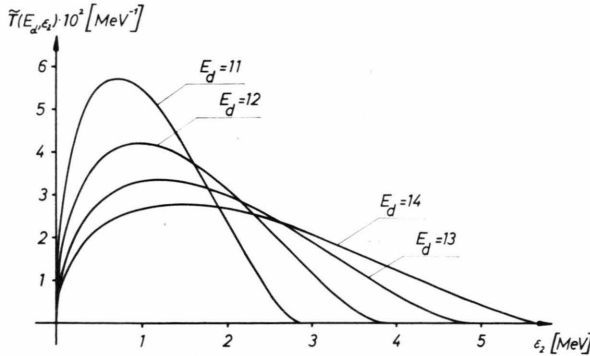


Abb. 7. veranschaulicht die Abhängigkeit des kinematischen Vorfaktors  $\tilde{T}(E_d, \varepsilon_2)$  von der Relativenergie des zweiten emittierten Nukleons bei verschiedenen Anregungsenergien. Wir sehen, daß mit steigender Anregungsenergie eine Verschiebung des Maximums und eine starke Kurvenverbreiterung eintritt.

Die Streuamplitude ist direkt proportional der Korrelationsfunktion  $K_{l_1' l_3' n'}$ .  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  sind, wie oben erklärt, die Relativenergien der auslaufenden Nukleonen. Da die Korrelationsfunktion stark von den beteiligten Drehimpulsen  $l_1, l_3$  der Ejektile und der Korrelationsquantenzahl  $n$  abhängt, erwarten wir für den WQ eine stark „gepickte“ Funktion. Die Anzahl der Knoten in  $K_{l_1 l_3 n}$ , ist identisch der Zahl  $n$ . Schließlich sei hier noch vermerkt, daß zur vollständigen Beschreibung fünf Korrelationsquantenzahlen  $n$  ausreichen<sup>5</sup>. Werden die Kanalspins  $\Sigma$  nicht beobachtet, dann ist über sie mit einem Gewichtungsfaktor zu summieren

$$d\sigma_{r' \rightarrow r} = \sum_{\Sigma, \Sigma'} g(\Sigma) \cdot d\sigma_{r' \Sigma', r \Sigma}. \quad (23)$$

$g(\Sigma) = [(2\Sigma + 1)/(2S + 1) (2J_n + 1)]$  gibt die relative Wahrscheinlichkeit an, in einem unpolarisierten Strahl den Kanalspin  $\Sigma$  zu finden.  $S$  ist der Gesamtspin des Projektils (im Falle von Deuteron ist  $S = 1$ ) und  $J_n$  ist der Kernspin des Targets.

Zusammenfassend ist festzustellen, daß durch Analyse eines experimentell vorliegenden Wirkungsquerschnittes explizit die Teilchenkorrelation angegeben werden kann.

#### b) Schalenmodell-Approximation für zwei Teilchen im Kontinuum

Durch Einführung einer asymptotischen Zweiteilchenkoordinate  $r^2 = \sum_{i=1}^2 r_i^2$  ergab sich eine Schrödinger-Gleichung für die Relativbewegung von zwei Teilchen in den energetisch positiven als auch energetisch negativen Dreiteilchenkanälen. Da die  $r_i$  keine unabhängigen Koordinaten sind, wird der Korrelationswinkel  $\alpha$  benötigt. Damit liegt als Definitionsbereich ein Viertelkreis fest. In dieser Darstellung lassen sich die Zustände durch  $\{l_1, l_3, n\}$  klassifizieren. Soll eine Ankopplung der Zweiteilchenzustände analog der (1p 1h)-Approximation in der Streutheorie nach dem unabhängigen Teilchenmodell erreicht werden, dann ist eine Kopplungskraft entsprechend einzuführen, die berücksichtigt, daß ein Teil der Zweiteilchen-Wechselwirkung bereits in dem Hamilton-Operator für zwei Teilchen enthalten ist

$$h_t(r, \alpha) = \sum_{i=1}^2 h_i(r_i) + \mathcal{V}(r_{12}) \quad \text{mit} \quad h_i(r_i) = t_i + \mathcal{V}_i.$$

In dieser Arbeit konzentriert sich das Interesse auf die individuellen Teilchenkorrelationen, deshalb werden die Kernwellenfunktion in der üblichen Schalenmodellbasis approximiert und die Zustände des Zweiteilchenkontinuums nach Einteilchenzuständen entwickelt. Diese Behandlung sichert

(I) Eindeutigkeit der Anschlußbedingungen im Zweiteilchenkontinuum für die  $R$ -Matrix-Technik,

(II) die Verwendung der Restwechselwirkung in gewohnter Darstellung,

(III) das Studium des Korrelationsverhaltens im unabhängigen Teilchenmodell.

Nach der Schalenmodell-Vorstellung in der Theorie der Kernreaktionen sind nun die ( $A-2$ )-Nukleonen in gebundenen Zuständen und zwei Teilchen im Kontinuum. Mit den Eigenfunktionen zu  $h_t$  wird ein diskreter Satz konstruiert, nachdem die Streufunktion entwickelt und die  $S$ -Matrix bestimmt wird. Die Berechnung der  $S$ -Matrix wird über die Dreiteilchen- $R$ -Matrix vorgenommen. Die Genauigkeit der  $S$ -Matrix ist abhängig von der Konvergenz in einem bestimmten Energie-



bereich<sup>18</sup> und kann durch geschickte Wahl der Randbedingung im Prinzip auf ein paar Prozent genau bestimmt werden. Nachteilig kann sich der diskontinuierliche Übergang der Wellenfunktion am Matching-Radius und die Verletzung der Kanalorthogonalität zwischen den offenen und geschlossenen Kanälen auswirken<sup>6</sup>. Die Eigenkanaltheorie von DANOS und GREINER<sup>10</sup> vermeidet diese Komplikationen.

Die  $R$ -Matrix-Technik verlangt eine Aufteilung des Konfigurationsraumes in zwei Bereiche: einen inneren (i) oder Wechselwirkungsbereich und einen äußeren (a) oder wechselwirkungsfreien Bereich. Der Radius, der (i) von (a) trennt, wird Matching-Radius  $R_c$  bzw.  $R_r$  (für die Zweiteilchen- bzw. Dreiteilchenkanäle) genannt. Das Gebiet  $r \geq R$  wird durch einen Hamilton-Operator bestimmt, der die Relativbewegung der Reaktionsprodukte in jedem Kanal beschreibt. Im Innenbereich ist der Vielteilchen-Hamiltonoperator mit bestimmten Randbedingungen, die frei gewählt werden können, zu lösen. Die konstante Randbedingung  $b_c$  bzw.  $b_r$  kann für die offenen und geschlossenen Kanäle denselben Wert besitzen. Der Oberflächenoperator

$$\mathcal{L}(\tilde{b}_r) = \frac{\hbar^2}{2m} \delta(r_r - R_r) \left\{ \frac{d}{dr_r} - \frac{\tilde{b}_r - 1}{R_r} \right\} \quad (2)$$

sichert die logarithmische Anschlußbedingung an den Außenraum. Die Basisvektoren  $\Phi_{Ar}$  für zwei Kontinuumsteilchen erfüllen dann die Eigenwertgleichung

$$(H_0 + \mathcal{L} - E) \Phi_{Ar} = \mathcal{L} \Phi_{Ar}. \quad (3)$$

Den Oberflächenoperator  $\mathcal{L}$  für die Dreiteilchenkanäle ist analog den Zweiteilchenkanälen (einer Darstellung von BLOCH<sup>11</sup> eingeführt. Die sich ergebenden Eigenwerte sind  $E_A = (\hbar k_A)^2/2m$  mit den zugehörigen Eigenfunktionen

$$\Phi_{Ar} = \left\{ \begin{aligned} &(A/r^2) J_{l_1+l_3+2n+2}(X_0) \\ &+ (B/r^2) J_{l_1+l_3+2n+2}(X_1) + (C/r^2) N_{l_1+l_3+2n+2}(X_1) \end{aligned} \right\} \quad \text{für} \quad \left\{ \begin{aligned} &0 \leq r \leq R_0, \\ &R_0 \leq r \leq R_r. \end{aligned} \right\}.$$

Die Argumente der Zweiteilchenfunktionen sind festgelegt durch

$$X_0 = r(k_A^2 + 2(2mV_0/\hbar^2))^{1/2} \quad \text{und} \quad X_1 = r k_A.$$

Der Kernrand ist durch  $R_0$  fixiert. Die drei auftretenden Konstanten  $A$ ,  $B$  und  $C$  sind durch die logarithmische Ableitung am Kernrand und die Normierung innerhalb (i) (eines Viertelkreises) eindeutig festgelegt. Insgesamt folgt für den  $(r\alpha)$ -Bereich

$$\Phi_{Ar}(r, \alpha) = \Phi_{Ar}(r) \cdot K_{l_1 l_3 n}(\alpha). \quad (5)$$

Im Hinblick darauf, daß die Schalenmodell-Technik benutzt werden soll, wird die Zweiteilchenfunktion über den Viertelkreis analytisch in das Quadrat, das durch die Koordinaten  $(r_1, r_2)$  definiert wird, fortgesetzt. Diese Bereichserweiterung verdient unsere besondere Aufmerksamkeit, weil die Zustandsvektoren  $\Phi_{Ar}$  inner-

halb des quadratischen Bereiches nicht mehr orthogonal sind. Die Nichtorthogonalität der Basisvektoren bildet keine ernste Schwierigkeit, da man das Basissystem innerhalb des quadratischen Bereiches orthogonalisieren kann oder die Diagonalisation in einer nichtorthogonalen Basis ausführen kann. Da die Entwicklungskoeffizienten innerhalb der Grenzen  $0 \leq \{r_1, r_2\} \leq a$  nicht analytisch angebar sind, ist es vernünftig, auf die Orthogonalisation zu verzichten und die Diagonalisation mit nichtorthogonalen Basisvektoren durchzuführen. Vorteil: Die Zahl der Kanalprojektionen in die Dreiteilchenkanäle wird reduziert. Im einzelnen werden die Zweiteilchen-Basisvektoren nach unkorrelierten Schalenmodell-Zustände  $|1\rangle$  und  $|3\rangle$  entwickelt, wie sie durch Integration der radialen Einteilchen-Schrödinger-Gleichung, beispielsweise mit Saxon-Wood-Potential, erhältlich sind.

$$\Phi_{Ar} = \sum_{i,3} a_{i,3} |1\rangle |3\rangle. \quad (6)$$

„1“ und „3“ steht für die relevanten Quantenzahlen die zur Spezifikation eines Einteilchen-Zustandes notwendig sind.  $A$  charakterisiert die Zweiteilchenzustände und steht als Abkürzung für den Satz von Quantenzahlen  $\{l_1, l_3, n, b, a\}$ , und  $r$  ist der Dreiteilchenkanal-Index. Der Entwicklungskoeffizient ist

$$a_{i,3}(A, r) = \langle 3 | \langle 1 | \Phi_{Ar}(r, \alpha) \rangle. \quad (7)$$

Für die  $R$ -Matrix-Zustände folgt

$$\tilde{X}_{A,r} = \mathcal{A} \{ \Phi_{Ar} \cdot \mathcal{Y}_{J_p J_n}^M \}. \quad (8)$$

$\mathcal{A}$  ist ein Antisymmetrisierungs-Operator und sorgt für die Antisymmetrisierung der beiden Teilchen im Kontinuum und den  $(A-2)$ -gebundenen Teilchen.

---


$$\left\{ \begin{aligned} &0 \leq r \leq R_0, \\ &R_0 \leq r \leq R_r. \end{aligned} \right\}.$$


---

$\mathcal{Y}_{J_p J_n}^M$  enthält alle Winkel- und Spin-Anteile des Targets und der beiden Teilchen, sowie die radialen Lochfunktionen der beiden Löcher:

$$\mathcal{Y}_{J_p J_n}^M = [J_h \otimes [(l_1 \otimes s_1)^{j_1} \otimes (l_3 \otimes s_3)^{j_3}]]_M^J \cdot \Phi_{r, \alpha}. \quad (9)$$

Damit schreibt sich die Basis

$$\tilde{X}_{A,r} = \sum_{i,3} a_{i,3}(A, r) \cdot |\Phi_2^1 \frac{3}{4} \rangle_{J_p, J_n}^M, \quad (10)$$

mit

$$\begin{aligned} |\Phi_2^1 \frac{3}{4} \rangle_{J_p, J_n}^M &= \sum_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_4 \\ m_1, \dots, m_4 \\ M_p, M_n}} (-)^{J_h + M_h} (J_h J_p J | - M_h M_p M) \\ &\cdot (j_1 j_3 J_p | m_1 m_3 M_p) (j_2 j_4 J_h | m_2 m_4 M_h) \\ &\cdot (l_1 s_1 j_1 | \lambda_1 \mu_1 m_1) (l_2 s_2 j_2 | \lambda_2 \mu_2 m_2) (l_3 s_3 j_3 | \lambda_3 \mu_3 m_3) \\ &\cdot (l_4 s_4 j_4 | \lambda_4 \mu_4 m_4) \\ &\cdot Y_{l_1 \lambda_1} Y_{l_2 \lambda_2} Y_{l_3 \lambda_3} Y_{l_4 \lambda_4} \chi_{s_1 \mu_1} \chi_{s_2 \mu_2} \chi_{s_3 \mu_3} \chi_{s_4 \mu_4} |1\rangle |2\rangle |3\rangle |4\rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

Damit wird die Diagonalisierung des Vielteilchen-Hamilton-Operators

$$H = \sum_{ij} T_{ij} a_i^+ a_j + \sum_{ijkl} V_{ijkl} a_i^+ a_j^+ a_k a_l$$

im Unterraum der (2p 2h)-Anregungen vorgenommen. Für die Matrixelemente im (2p 2h)-Unterraum ergibt sich

$$\mathcal{H} = \langle \tilde{X}_{A,r} | H | \tilde{X}_{A',r'} \rangle = \sum_{1,3,5,7} G \cdot \langle \Phi_{2,4}^{1,3} | H | \Phi_{6,8}^{5,7} \rangle_{JJ}. \quad (12)$$

Die Kopplungsstärke  $G = a_{1,3} \cdot a_{5,7}$  drückt aus, wie stark die Kontinuums-Zustände miteinander verknüpft sind. Für ein Modell unabhängiger Teilchen ist  $G = 1$ . Die Matrixelemente  $\langle \Phi_{2,4}^{1,3} | H | \Phi_{6,8}^{5,7} \rangle$  sind bekannt<sup>7,22</sup>.

Die Diagonalisation liefert die Eigenwerte  $E_A$  von  $H$  und die Eigenfunktionen  $X_A$  sind

$$X_A = \sum_{r=1}^K \sum_{A=1}^{N_r} V_{\bar{A}}(A, r) \cdot \tilde{X}_{A,r}. \quad (13)$$

Die Partialbreiten sind wie folgt festgelegt

$$\Gamma_{\bar{A},r} = \sum_{A=1}^{N_r} V_{\bar{A}}(A, r) \cdot \tilde{\Gamma}_{A,r}. \quad (14)$$

Die Beimischungskoeffizienten  $V_A$  sind von der Diagonalisation her bekannt.  $K$  spezifiziert die Anzahl der Kanäle und  $N_r$  die Anzahl von Zweiteilchen-Niveaus pro Kanal. Damit liegen die  $R$ -Matrix- und  $S$ -Matrix-Elemente fest. Bei der Herleitung des Reaktionsquerschnittes wird man auf eine Darstellung der  $S$ -Matrix geführt mit folgendem Klassifikations-Schema der Kanäle

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\Sigma L}^M = [[J_h \otimes [s_1 \otimes s_3]_{m_{13}}^{s_{13}}]_{\mu_x} \otimes (l_1 \otimes l_3)_{m_L}^L]_M \cdot \Phi_{r\Sigma}.$$

Ein Kopplungskoeffizient  $K_{\Sigma L, J_p J_h}^J$  verknüpft beide Darstellungen

$$|\Phi_{2,4}^{1,3}\rangle_{\Sigma, L}^J = \sum_{s_{13}, \Sigma, L} K_{\Sigma L, J_p J_h}^J |\Phi_{2,4}^{1,3}\rangle_{J_p J_h},$$

mit

$$K_{\Sigma L, J_p J_h}^J = (-)^{2s_3+j_3-j_1+L+\Sigma+J} \hat{S}_{13} \hat{J}_1 \hat{J}_3 \hat{L} \hat{\Sigma} \hat{J}_p \cdot \left\{ \begin{matrix} J_p & J_h & J \\ \Sigma & L & S_{13} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_3 & J_p \\ l_1 & l_3 & L \\ s_1 & s_3 & S_{13} \end{matrix} \right\}$$

und der Bezeichnung  $\hat{x} = \sqrt{2x+1}$ .

Kurzum: Es wird die korrelierte Wellenfunktion in Termen der Schalenmodell-Näherung berechnet, die Korrelationskoeffizienten (Tabelle III) berücksichtigen explizit die Einteilchen-Korrelation.

#### c) Kernmodell für die doppelte Nukleonenemission und Konvergenztest

Zur Interpretation experimenteller Dreikörperzerfälle und zur Vorhersage bestimmter Partialquerschnitte

spielt die Konvergenz des Verfahrens eine entscheidende Rolle. Erwünscht ist, daß die Entwicklungen rasch konvergieren. Besondere Aufmerksamkeit verdient

( $\alpha$ ) die Entwicklung nach unkorrelierten Schalenmodell-Wellenfunktionen,

( $\beta$ ) der Bereichswechsel der dynamischen Variablen und

( $\gamma$ ) die  $R$ -Matrix selbst.

Der letzte Punkt ist der unkritischste, weil die  $R$ -Matrix prinzipiell auf wenige Prozent genau bestimmbar ist<sup>18</sup>.

Im Niederenergiebereich wird die doppelte Nukleonenemission besonders durch eine Deuteron-Reaktion begünstigt, weil durch den Einbau zweier Nukleonen in den Kern etwa 14 MeV gewonnen werden. Dieser Energie steht die geringe Bindungsenergie des Deuterons von etwa 2,224 MeV gegenüber. Es genügen deshalb schon einige MeV Einschubenergie, um die Reaktionsschwelle für die verschiedenen von Deuteronen induzierten Reaktionen zu überwinden. Die durch Deuteron hervorgerufenen Reaktionen sind deshalb vielfältig und ihre Besonderheiten hängen von der Einschubenergie, der Ladung des Targets, einer eventuellen Polarisierung des Deuteron-Strahles usw. ab. Für das relativ lose gebundene Clusterteilchen kann dieses zum Aufbruch, reiner Ablenkung oder zur Bildung eines Compoundkerns führen. Es soll hier ein mathematisches Modell betrachtet werden ohne Berücksichtigung einer eventuellen Polarisierung der einfallenden Deuteronwelle und Coulombeffekten. Die Modell-Parameter werden am Beispiel  $N^{14}(d, 2n)0^{14}$  orientiert. Sinngemäß gelten die Überlegungen auch für (d, 2p)-Reaktionen und ähnliche, oder Photo-Prozesse vom Typ ( $\gamma$ , 2n) etc. Es wird der differentielle WQ für den niedrig liegenden kollektiven  $0^+$ -Zustand mit dem Isospin  $T=0$  berechnet und die anstehenden Schwierigkeiten diskutiert. Das Compoundsystem  $0^{16}$  wird mit Löchern in der p-Schale besetzt und Teilchenanregungen werden in der (sd)-Schale zugelassen, für das Modell nur ( $d_{5/2}$ ) ( $d_{3/2}$ )-Teilchenpaare. Insgesamt ergeben sich im (1p 1h)-Unterraum 14 Konfigurationen, somit 14 Kanäle zum Compoundsystem  $J^\pi = 0^+$ . Die Modellauswahl (Abb. 8) beschränkt sich auf die folgenden Zustände ( $\lambda$  steht für die radialen Einteilchen-Quantenzahlen):

$$\begin{aligned} & (1p_{1/2})^{-2} (\lambda_1 d_{5/2})^1 (\lambda_2 d_{3/2})^1, \\ & (1p_{1/2})^{-1} (1p_{3/2})^{-1} (\lambda_1 d_{5/2})^1 (\lambda_2 d_{3/2})^1, \\ & (1p_{3/2})^{-2} (\lambda_1 d_{5/2})^1 (\lambda_2 d_{3/2})^1. \end{aligned}$$

Es werden also Einteilchen-Korrelationen in der (sd)-Schale zwischen einem  $d_{5/2}$ - und  $d_{3/2}$ -Neutron betrachtet. Den Radialanteil für die offenen sowie die geschlossenen Zweiteilchen-Kanäle berechnen wir aus der radialen Schrödinger-Gleichung

$$u''(r) + \frac{2m_{\text{red}}}{\hbar^2} \left\{ E - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_{\text{red}} r^2} - V(r) \right\} u(r) = 0 \quad (15)$$

Tabelle 1. Korrelationsfunktion

$(l_1, l_3, n)$	$\sqrt{\frac{2(l_1 + l_3 + 2n + 2)}{\sin 2\alpha}} \cdot d_{(1/2)(l_1+l_3+1), (1/2)(l_1-l_3)}^{(1/2)(l_1+l_3+1)+n} (2\alpha)$
$(l_1, l_3, 0)$	$\left( \frac{\Gamma(l_1 + l_3 + 3)}{\Gamma(l_1 + \frac{3}{2}) \Gamma(l_3 + \frac{3}{2})} \right)^{1/2} \cdot \sin^{l_3} \alpha \cdot \cos^{l_1} \alpha$
$(l_1, l_3, 1)$	$\left( \frac{\Gamma(l_1 + l_3 + 4)}{4 \Gamma(l_1 + \frac{5}{2}) \Gamma(l_3 + \frac{5}{2})} \right)^{1/2} \cdot \sin^{l_3} \alpha \cdot \cos^{l_1} \alpha \cdot \{2l_3 + 3 - 2(l_1 + l_3 + 2) \cdot \sin^2 \alpha\}$
$(0, 0, 0)$	$2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$
$0, 0, n)$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sin[2(n+1)\alpha]}{\sin \alpha \cos \alpha}$
$(0, 1, n)$	$\left( \frac{2(n+2)}{\pi(n+1)} \right)^{1/2} \frac{1}{\sin \alpha \sin 2\alpha} \left[ \sin[2(n+1)\alpha] - \frac{n+1}{n+2} \sin[2(n+2)\alpha] \right]$

Tabelle 2. Austauschterm

$(l_1, l_3, n)$	$(-)^n \sqrt{\frac{2(l_1 + l_3 + 2n + 2)}{\sin 2\alpha}} \cdot d_{(1/2)(l_3-l_1), -(1/2)(l_1+l_3+1)}^{(1/2)(l_1+l_3+1)+n} (2\alpha)$
$(0, 0, n)$	$(-)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin[2(n+1)\alpha]}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$
$(1, 0, n)$	$(-)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{2}{\cos^2 \alpha} \left[ \frac{\sin[2(n+1)\alpha]}{4(n+1)\sin \alpha} + \cos^2 \alpha \frac{\sin[(2n+3)\alpha]}{\sin 2\alpha} \right]$
$(0, 1, n)$	$(-)^n 2(2n+3) \sqrt{\frac{n+1}{2\pi(n+2)}} \cdot \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \left[ \frac{\sin[2(n+1)\alpha]}{2(n+1)\sin \alpha} - 2\cos^2 \alpha \frac{\sin[(2n+3)\alpha]}{(2n+3)\sin 2\alpha} \right]$
$(2, 0, n)$	$(-)^n 4 \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi(n+3)(2n+3)(2n+5)}} \cdot \frac{1}{\cos^3 \alpha} \cdot \left[ \left( \frac{3}{2} - (n+1)(2n+3)\cos^2 \alpha \right) \frac{\sin[2(n+1)\alpha]}{4(n+1)\sin \alpha} + \left( \frac{3}{2} + (2n+3)\cos^2 \alpha \right) \cos^2 \alpha \frac{\sin[(2n+3)\alpha]}{\sin 2\alpha} \right]$
$(1, 1, n)$	$(-)^n 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{n+1}{n+3} \cdot \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha} \left[ \left( \frac{1}{2} + (n+1)\cos^2 \alpha \right) \frac{\sin[2(n+1)\alpha]}{2(n+1)\sin \alpha} - \cos^2 \alpha \cdot \cos 2\alpha \frac{\sin[(2n+3)\alpha]}{\sin 2\alpha} \right]$
$(2, 1, n)$	$(-)^n 2 \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi(n+2)(n+3)(n+4)}} \cdot \frac{1}{\sin \alpha \cos^3 \alpha} \left[ \left( \frac{3}{4} - (n+1)^2 \cdot \cos^2 \alpha + 2(n+1)(n+2)\cos^4 \alpha \right) \cdot \frac{\sin[2(n+1)\alpha]}{2(n+1)\sin \alpha} + \left[ (3+n)\cos^2 \alpha - \left( \frac{3}{2} + 2(n+2)\cos^2 \alpha \right) \cos 2\alpha \right] \cos^2 \alpha \frac{\sin[(2n+3)\alpha]}{\sin 2\alpha} \right]$
$(1, 2, n)$	$(-)^n 4 \sqrt{\frac{n+1}{2\pi(n+2)(n+3)(n+4)}} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} \left[ \left( \frac{1}{4}(2n+5) + (n+1)\cos^2 \alpha \cdot [2n+5 - 2(n+2)\cos^2 \alpha] \right) \cdot \frac{\sin[2(n+1)\alpha]}{2(n+1)\sin \alpha} - \left( \frac{1}{2}(2n+5)\cos 2\alpha + [n+3 - 2(n+2)\cos 2\alpha]\cos^2 \alpha \right) \cos^2 \alpha \frac{\sin[(2n+3)\alpha]}{\sin 2\alpha} \right]$
$(0, 2, n)$	$(-)^n 2 \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi(n+3)(2n+3)(2n+5)}} \cdot \frac{1}{\cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha} \left[ \left( n+3 - \left[ \frac{1}{2} + (n+1)\cos^2 \alpha \right] \right) \cdot \frac{\sin[2(n+1)\alpha]}{2(n+1)\sin \alpha} - (3 + (2n+3)(1 - \cos 2\alpha)) \cos^2 \alpha \frac{\sin[(2n+3)\alpha]}{\sin 2\alpha} \right]$

Tabelle 2 (Fortsetzung)

$$\begin{aligned}
(2, 2, n) \quad & (-)^n 4 \sqrt{\frac{2(n+1)(n+4)}{\pi(n+2)(n+5)}} \cdot \frac{1}{(2n+5) \cos^3 \alpha \sin^2 \alpha} \left[ \left( \frac{1}{n+4} \left\{ \frac{3}{2} + (2n+5) \cos^2 \alpha \right\} \right. \right. \\
& \cdot \left. \left\{ \frac{2n+5}{4} + (n+1) \cos^2 \alpha [2n+5 - 2(n+2) \cos^2 \alpha] \right\} \right. \\
& - \left. \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \cdot \left[ n+3 - \left\{ \frac{1}{2} + (n+1) \cos^2 \alpha \right\} \right] (2n+3) \right) \cdot \frac{\sin [2(n+1)\alpha]}{2(n+1) \sin \alpha} \\
& - \left( \frac{1}{n+4} \left\{ \frac{3}{2} + (2n+5) \cos^2 \alpha \right\} \left\{ \frac{1}{2} (2n+5) \cos 2\alpha + [n+3 - 2(n+2) \cos 2\alpha] \cos^2 \alpha \right\} \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \cdot [3 + (2n+3)(1 - \cos 2\alpha)] \right) \cos^2 \alpha \frac{\sin [(2n+3)\alpha]}{\sin 2\alpha} \right]
\end{aligned}$$

Tabelle 3. Korrelationskoeffizienten.

$\lambda_1 \downarrow \lambda_2 \rightarrow d_{5/2}$	$\lambda_1 d_{5/2}$						
	-0.137352	-0.451110	-0.129708	-0.072430	-0.057638	-0.038092	-0.030457
	-0.237081	-0.753720	-0.199058	-0.109284	-0.088700	-0.057655	-0.046486
	-0.076859	-0.223149	-0.043562	-0.022178	-0.019694	-0.011867	-0.009983
	-0.044679	-0.128399	-0.023923	-0.012083	-0.010859	-0.006502	-0.005467
	-0.032472	-0.093756	-0.018017	-0.009130	-0.008194	-0.004892	-0.004150
	-0.022524	-0.064534	-0.011812	-0.005961	-0.005368	-0.003214	-0.002699
	-0.017862	-0.051362	-0.009734	-0.004908	-0.004434	-0.002635	-0.002238
	-0.355738	-0.159524	0.341995	0.040438	0.003553	0.024094	0.007541
	-0.099104	0.284830	0.208407	-0.034595	-0.019826	-0.001266	-0.006456
	0.214219	0.249273	-0.018743	-0.080073	-0.030658	-0.030332	-0.018366
	0.027034	-0.022681	-0.071535	-0.034864	-0.017065	-0.014066	-0.009173
	0.011921	-0.006775	-0.036180	-0.019039	-0.010171	-0.006953	-0.005462
	0.016778	0.004111	-0.028936	-0.015107	-0.006444	-0.005851	-0.003491
	0.006525	-0.002093	-0.018863	-0.009816	-0.005290	-0.003558	-0.002774
	-0.326642	0.103562	0.007944	-0.216715	-0.012424	0.008598	-0.013775
	0.174137	-0.072031	-0.257859	0.050841	0.083057	0.027793	0.0023721
	0.031744	-0.227814	0.146769	0.225485	0.055121	0.028413	0.025834
	-0.167706	-0.001621	0.228849	0.028729	0.000799	0.007784	0.004316
	-0.017799	0.065830	0.053102	0.008692	-0.004970	0.002553	-0.002507
	0.001771	0.023175	0.033625	0.007148	0.002619	-0.002091	0.001614
	-0.016306	0.018295	0.026399	0.006179	-0.002979	0.001618	-0.001167

mit Saxon-Woods-Potential

$$V(r) = V_c \left\{ \varrho(r) - \gamma \left( \frac{\hbar^2}{2mc} \right)^2 \cdot (\vec{l} \cdot \vec{\sigma}) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \varrho(r) \right\}$$

und  $\varrho(r) = \left\{ 1 + \exp \left( \frac{r - R_0}{t} \right) \right\}^{-1}$ .

Als Ladungsverteilung vom Fermi-Typ mit der Oberflächendicke  $t$  und Kernradius  $R_0$ . Für das Compound-system  $^{16}\text{O}$  werden die Parameter  $R_0 = 3,15$  fm,  $t = 0,65$  fm,  $V_c = -50$  MeV,  $\gamma = 35,0$  verwendet. Die Diskretisierung des Einteilchenkontinuums erfolgt nun dadurch, daß Gl. (15) für die positiven Energie-





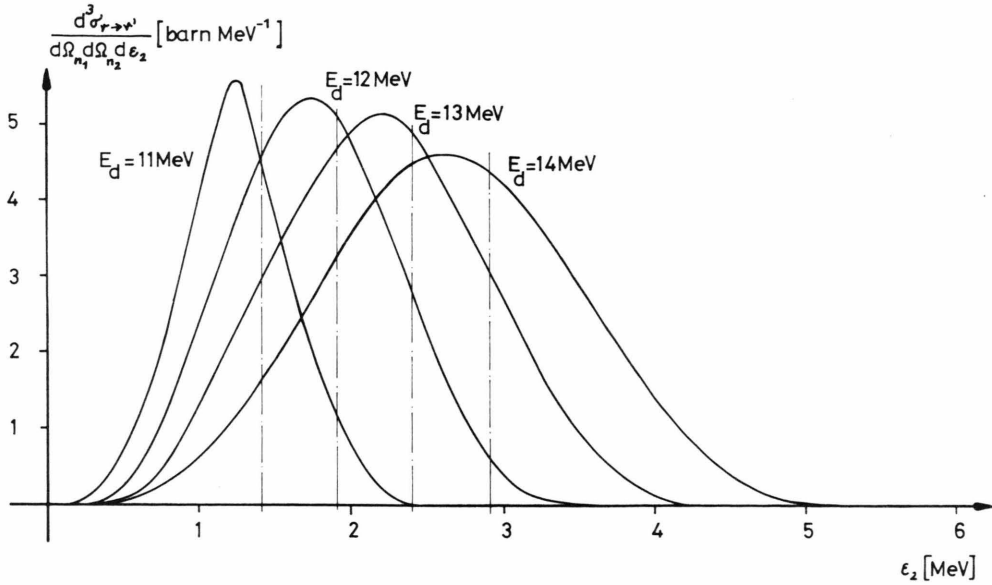


Abb. 11. Für die Restkernkonfiguration  $(1p_{1/2})_n^{-2}$  mit den festen Richtungen  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 60^\circ$ ,  $\varphi_2 = \Phi_{12} = 90^\circ$  erhalten wir einen diff. WQ in Abhängigkeit von  $\epsilon_2$ , der mit zunehmender Anregungsenergie eine starke Verbreiterung zeigt. Die strichpunktierte Linie zeigt die Stelle, an der beide Teilchen die gleiche Energie im Ausgangskanal haben.

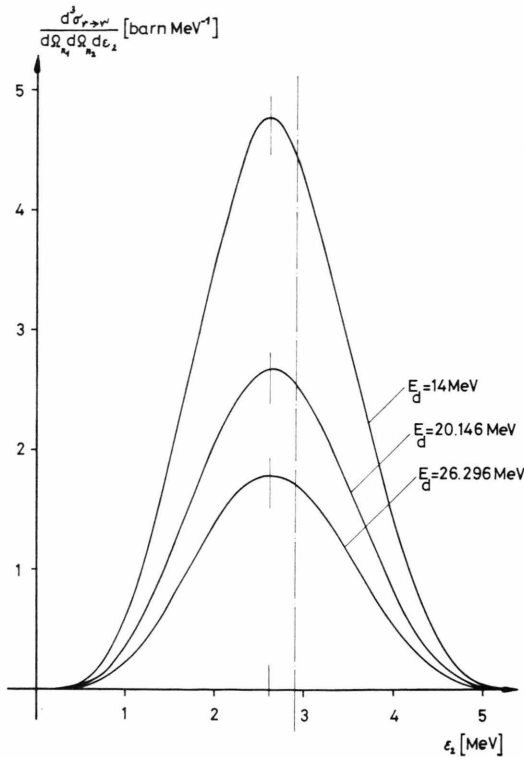


Abb. 12. zeigt den WQ in Abhängigkeit von den festen Richtungen  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 60^\circ$  und  $\varphi_2 = \Phi_{12} = 90^\circ$  für die drei Modell-Restkernkonfigurationen. Wir erhalten das Maximum stets beim gleichen Energie-Verhältnis  $\epsilon_2/\epsilon_1 = 0,836$ .

der Anregungsenergie von  $E_d = 11$  bis 14 MeV. Zur eindeutigen Charakterisierung von zwei Richtungen sind insgesamt vier Winkel erforderlich (Abbildung 10), die wie folgt gewählt werden: Die erste Emissionsrichtung liegt durch  $\varphi_1 = 0^\circ$  und  $\vartheta_1$  fest und die zweite durch  $\varphi_2$  und  $\vartheta_2$ . Zur gegenseitigen Orientierung wird der Zwischenwinkel  $\Phi_{12}$  gewählt. Die eingezeichnete vertikale strichpunktierte Linie (siehe Abbildung 11), kennzeichnet die Stelle, an der beide Teilchen die gleiche Energie im Ausgangskanal haben. Als typisches Resultat der  $(r, \alpha)$ -Darstellung folgt eine Anisotropie in der Energieverteilung im Wirkungsquerschnitt. In allen Fällen liegt das Maximum stets beim gleichen Energieverhältnis  $\epsilon_2/\epsilon_1 = 0,836$  und verschiebt sich mit wachsender Anregungsenergie auf der  $\epsilon_2$ -Skala (Abbildung 11). Gleichzeitig ergibt sich eine Verbreiterung der Kurven und eine Abnahme des Wirkungsquerschnittes. Für die Emission zweier Neutronen aus den tiefer liegenden Compoundkern-Konfigurationen  $(1p_{1/2})^{-1}(1p_{3/2})^{-1}$  und  $(1p_{3/2})^{-2}$  wird erwartet, daß die Anisotropie in der Energie-Verteilung erhalten bleibt. Dieses bestätigen die Rechnungen, die in Abbildung 12 aufgetragen sind.

Ist eine Diskriminierung nach einer Teilchenenergie nicht möglich, dann wird über diesen Freiheitsgrad integriert, mit einer isotropen Energieverteilung ergibt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt, den Abb. 13 und 14 zeigen. Hier treten die drei charakteristischen Resonanzen auf, die gemäß dem Modell erwartet werden. Die Pfeile an der Abszisse kennzeichnen die

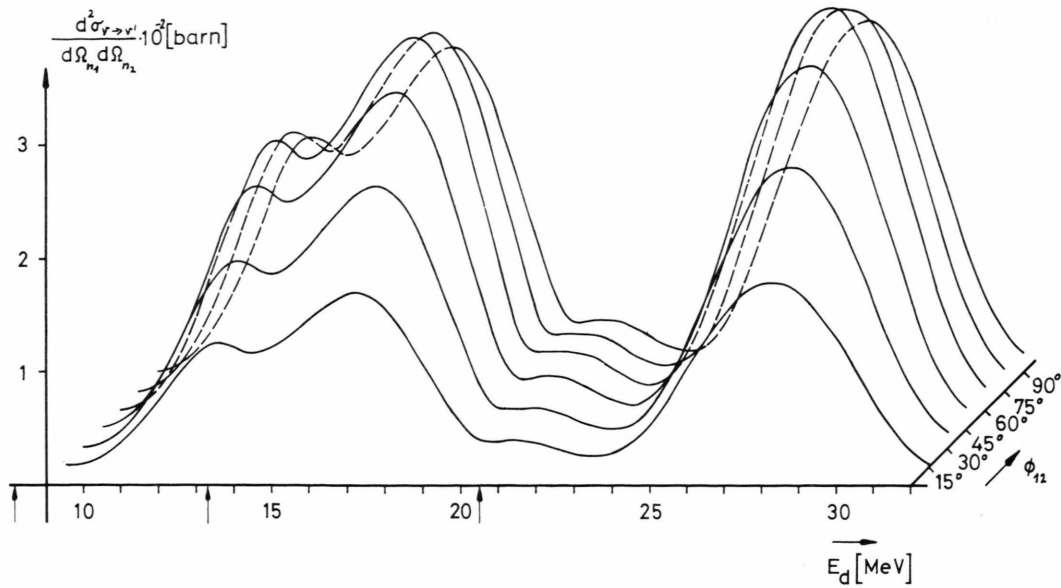


Abb. 13. zeigt den diff. WQ in Abhängigkeit von dem Zwischenwinkel  $\Phi_{12}$ , und der Anregungsenergie  $E_d$  bei festen Winkeln  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 60^\circ$  und  $\varphi_2 = 90^\circ$ . Die Pfeile an der Abszisse kennzeichnen die Positionen an denen sich die Dreiteilchenkanäle öffnen. Maximal wird der WQ um einen Zwischenwinkel von  $60^\circ$ .

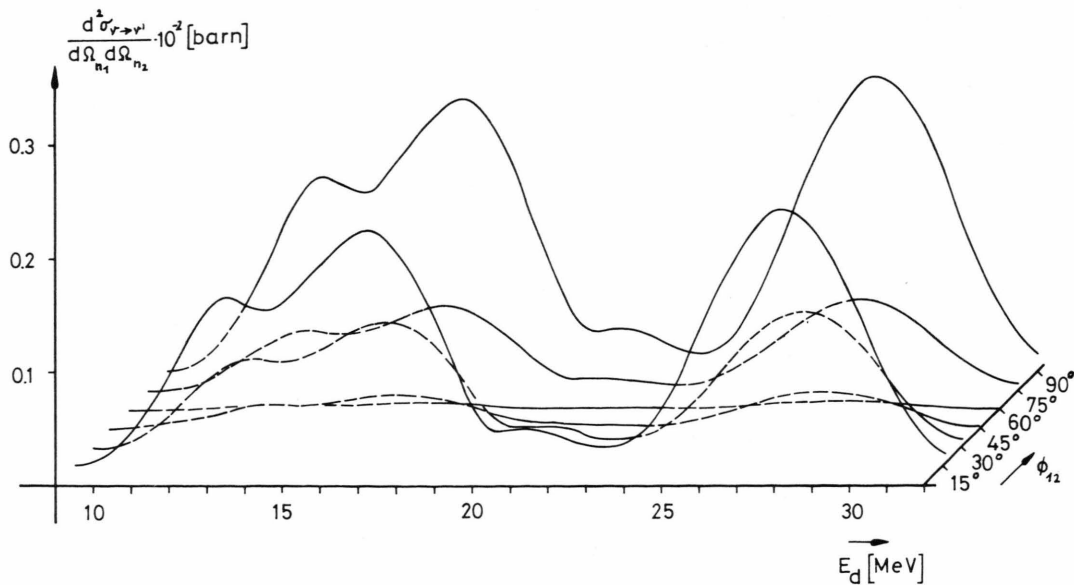


Abb. 14. zeigt den diff. WQ in Abhängigkeit von dem Zwischenwinkel  $\Phi_{12}$  und der Anregungsenergie  $E_d$ , bei festen Winkeln  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 30^\circ$  und  $\varphi_2 = 90^\circ$ . Hier ist der WQ um einen Zwischenwinkel von  $60^\circ$  minimal.

Position, an der sich die Dreiteilchen-Kanäle öffnen. Alle Wirkungsquerschnitte für die verschiedenen Zwischenwinkel  $\Phi_{12}$  haben einen ähnlichen Verlauf mit zwei dicht aufeinanderfolgenden Maxima und einem kleineren Maximum. Für einen Zwischenwinkel  $\Phi_{12}$

um  $60^\circ$  (Abb. 13) bei festen Richtungen  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 60^\circ$  und  $\varphi_2 = 90^\circ$  wird der Wirkungsquerschnitt maximal. Fig. 14 zeigt eine entgegengesetzte Situation für die festen Richtungen  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 30^\circ$  und  $\varphi_2 = 90^\circ$ , hier ist um  $\Phi_{12} = 60^\circ$  der Wirkungsquerschnitt am kleinsten

und steigt mit wachsendem bzw. abnehmenden Zwischenwinkel wieder an. Ferner ist der Wirkungsquerschnitt im gesamten Zwischenwinkelbereich um eine Zehnerpotenz kleiner. Wir halten letztlich fest, daß der Wirkungsquerschnitt in beiden Fällen eine starke Winkelabhängigkeit mit ausgeprägten Maxima über der ersten Zweiteilchenschwelle zeigt.

Aus  $R$ -Matrix-Konvergenzuntersuchungen<sup>18</sup> ist bekannt, daß die niedrig liegenden Zustände den größten Beitrag zur vollen  $R$ -Matrix-Stärke liefern. Aufgrund dessen ist zu erwarten, daß ein solch einfaches mathematisches Modell lediglich die Grobstruktur richtig erfaßt. Es ist klar, daß dieses Modell noch nicht endgültig sein kann. Vielmehr muß versucht werden, weitere Zustände des Zweiteilchen-Kontinuums in die Rechnungen einzubeziehen. Erst durch Erweiterung dieses Konzeptes gelangt man zu einem realistischen Modell, das gestattet, nähere Aussagen über die Kontinuums Wechselwirkung von Teilchenpaaren und Feinheiten im differentiellen Wirkungsquerschnitt zu erklären.

#### IV. Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde eine Schalenmodell-Theorie der Kernreaktionen mit drei Teilchen im Ausgangskanal formuliert und eine entsprechende Phasenanalyse durchgeführt. Das Verfahren ist nicht beschränkt auf das durchgerechnete Modell (d, 2n), sondern es ist auch anwendbar auf Reaktionen vom Typ (N, 2n), (N, 2p), (N, pn) etc. Ebenso für die durch Pionen oder Photonen induzierte doppelte Nukleonenemission wie ( $\pi$ , NN)<sup>23</sup> und ( $\gamma$ , NN).

Wird angenommen, daß die Kraft zwischen den Teilchen als Gradient eines Potentials dargestellt werden kann, dann läßt sich, wie oben gezeigt wurde eine Trennung in Schwerpunkts- und Relativ-Bewegung vornehmen. Mit anderen Worten, falls das Wechselwirkungspotential von der relativen Lage der Teilchen und nicht von der absoluten Lage der Teilchen abhängt, ist stets eine Separation möglich. Dieses ist stets der Fall, bei Invarianz unter Translation von allen Teilchen<sup>24</sup>. Für die verbleibende Relativbewegung wurde gezeigt, daß durch eine Koordinatentransformation von  $(r_1, r_2)$  nach  $(r, \alpha)$ , mit Hilfe von mehrdimensionalen Kugelkoordinaten, eine saubere Formulierung der Anschlußbedingungen für die Dreiteilchen-Reaktionen erreicht werden kann.  $r$  ist die kollektive Kanal-coordinate, sie beschreibt die relative Bewegung im Dreiteilchenkanal. Die Einteilchenkoordinaten  $r_1$  und  $r_2$  sind nicht unabhängig voneinander, sondern über den Korrelationswinkel  $\alpha$  miteinander verknüpft. Es ist klar zu sehen, daß dieses Verfahren nicht auf das Zweiteilchenkontinuum beschränkt ist, sondern daß auch das  $n$ -Teilchenkontinuum behandelt werden kann. Eine

Anwendung der formalen Reaktionstheorien, wie beispielsweise der  $R$ -Matrix-Theorie und ihre Erweiterung auf Dreiteilchenreaktionen, gestattet es dann, eine Schalenmodell-Beschreibung für zwei Teilchen im Kontinuum durchzuführen. Besonders auffällig ist hier, daß die radialen Kanalwellenfunktionen durch eine  $r^{-5/2}$ -Abhängigkeit (für Stromnormierung) gegenüber  $r^{-1}$  im Zweiteilchenfall gedämpft werden. Die ein- und auslaufenden Wellen I und 0 beinhalten ebenfalls den Faktor  $r^{5/2}$ , so daß I und 0 dieselbe Wronski-Identität erfüllen wie in dem Fall der Zweiteilchenkanäle. Für ein Produkt von zwei unabhängigen Teilchenflüssen vom Restkern, erwarten wir für die Kanalwellenfunktion eine  $r^{-2}$ -Abhängigkeit. Die radiale Abhängigkeit für die Dreiteilchenkanäle ist um eine Potenz  $r^{-1/2}$  stärker. Dieses ist ein charakteristisches Resultat der Nukleonenkorrelation im Dreiteilchen-Ausgangskanal<sup>21</sup>. Die Bestimmung der  $S$ -Matrix erfolgt über die  $R$ -Matrix-Technik. Das Zweiteilchen-Spektrum wurde durch Vorgabe einer festen Randbedingung (die willkürlich  $-0,5$  gewählt wurde) am Matching-Radius konstruiert. Mit diesen korrelierten Eigenfunktionen ist eine geeignete Basis für die Behandlung des Zweiteilchen-Kontinuums gefunden, mit der dann die Diagonalisierung des Hamilton-Operators  $H$  vorgenommen wurde. Hierbei gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten: Entweder man führt die Diagonalisation im  $(r\alpha)$ -Bereich aus, oder man entwickelt die Funktionen im  $(r\alpha)$ -Bereich nach einem Produkt von unkorrelierten Schalenmodell-Wellenfunktionen des Einteilchen-Hamilton-Operators. Beide Methoden verfolgen dasselbe Ziel: über die Restwechselwirkung eine Kopplung der Kontinuumszustände untereinander, eine Ankopplung der Kontinuumszustände an die gebundenen Zustände und letztlich eine Kopplung der gebundenen Zustände untereinander zu erreichen. In der vorliegenden Beschreibung wurde die Diagonalisation im Modell unabhängiger Teilchenanregungen vorgenommen. Die Herleitung des Wirkungsquerschnitts erfolgte über die asymptotische Darstellung der Dreiteilchenfunktionen. Charakteristisch für den Wirkungsquerschnitt ist, außer seiner Winkelverteilung, die Energiekorrelation zwischen den beiden Nukleonen im Ausgangskanal. Numerische Modellrechnungen wurden für den  $0^+$ -Zustand am Compoundsystem  $0^{16}$  durchgeführt. Im einzelnen wurde eine Phasenanalyse für die  $N^{14}(d, 2n) 0^{14}$ -Reaktion an einem 3-Kanal-Modell mit einem Zweiteilchen-Kontinuumszustand behandelt. Im Einteilchen-Kontinuum wurden vier Niveaus pro Einteilchenkanal berücksichtigt. Eine Beschränkung auf die  $(2p\ 2h)$ -Anregungen mit zwei Neutronen in der (sd)-Schale und zwei Neutronen-Löcher in der p-Schale, stellt keine Beschränkung des Modells dar. Die Energiekorrelation in der (sd)-Schale zwischen einem  $d_{5/2}$ - und einem

$d_{3/2}$ -Neutron, wurden explizit berechnet und berücksichtigt. Als typisches Resultat dieses Modells stellen wir eine Anisotropie in der Energieverteilung im Ausgangskanal zwischen den beiden Neutronen fest, die wir dem kinematischen Faktor  $T(E_d, \varepsilon_2)$  (siehe Abb. 7) zuschreiben.

Für eine realistische Modell-Betrachtung, muß die gesamte Basis von 14 Zuständen für den  $0^+$ -Zustand berücksichtigt werden. Ebenso Teilchenpaare aus höher liegenden Schalen. Durch Summation aller partiellen Wirkungsquerschnitte erhalten wir letztlich den totalen Wirkungsquerschnitt. In das Modell müssen weiterhin die  $(d, np)$ - und  $(d, 2p)$ -Kanäle eingeschlossen werden. Eine eventuell begleitende  $\gamma$ -Emission ist störungstheoretisch zu berücksichtigen. Als weiteres Anwendungsgebiet ist die doppelte und mehrfache Nukleonenemission durch Pionen-<sup>23</sup> und Photo-Anregung zu nennen. Im Rahmen dieser Theorie wäre es dann für die Photoanregung leicht abzuschätzen, welchen Beitrag die  $(2p\ 2h)$ -Anteile und  $(npn)$ -Anteile zur Dipolsumme liefern.

Als Novum ist festzustellen, daß es damit gelungen ist, eine Schalenmodell-Beschreibung der Kernreaktionen für zwei Teilchen im Kontinuum modellmäßig zu beschreiben. Die Antisymmetrisierung der Kontinuumswellenfunktionen sind einfach durchzuführen und bilden keine ernste Schwierigkeit, auch im Falle des  $n$ -Teilchen-Kontinuums. Die Berücksichtigung von mehreren Zweiteilchenzuständen würde das Modell realistischer werden lassen. In diesem Zusammenhang wären dann entsprechende Experimente wünschenswert, an denen die Leistungsfähigkeit der Theorie getestet werden kann.

Herrn Professor Dr. W. GREINER danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für konstruktive Diskussionen. Weiterhin danke ich Herrn Professor Dr. M. DANOS vom National Bureau of Standards, Washington, D.C. und Herrn Professor Dr. W. SCHEID für wertvolle Ratschläge bei der Durchführung. Herrn Dr. H. G. WAHSWEILER sei gedankt für anregende Diskussionen, die mich vertraut machten mit dem Konzept der Eigenkanal-Theorie.

Alle numerischen Rechnungen wurden auf der UNIVAC 1108 des Zentralen Recheninstitutes der Universität Frankfurt durchgeführt.

- <sup>1</sup> J. M. EISENBERG u. W. GREINER, Nuclear Theory, Vol. 3, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1972.
- <sup>2</sup> S. WEINBERG, Phys. Rev. **133**, B232 [1964]; M. R. C. MAC DOWELL u. T. P. COLEMAN, Introduction to the Theory of Ion-Atomic Collisions [1970] and references therein; L. D. FADDEEV, Mathematical Aspects of the Three-Body Problem in the Quantum Scattering Theory [1965]. J.S.C. MCKEE and P. M. ROLPH, Three Body Problem, North-Holland Publ. Company, Amsterdam and London 1970.
- <sup>3</sup> T. R. ROCK u. L.T.B. GOLDFARB, Nucl. Phys. **27**, 79 [1961].
- <sup>4</sup> F. A. GÜCKEL und Mitarbeiter, Z. Physik **214**, 321 [1968].
- <sup>5</sup> M. DANOS u. W. GREINER, Z. Physik **202**, 125 [1967].
- <sup>6</sup> C. MAHAUX u. H. A. WEIDENMÜLLER, Shell-Model-Approach to Nuclear Reactions, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1969.
- <sup>7</sup> A. GRAUEL, Dissertation 1971, Institut für Theoretische Physik an der J. W. Goethe-Universität Frankfurt.
- <sup>8</sup> A. M. LANE u. R. G. THOMAS, Rev. Mod. Phys. **30**, (No. 2) Part I [1958]; — E. P. WIGNER, Facets of Physics, ed. D. A. Bromley and V. W. Hughes, Academic Press, New York and London 1970.
- <sup>9</sup> M. DANOS u. W. GREINER, Phys. Rev. **138**, B93 [1965]; M. DANOS u. W. GREINER, Phys. Rev. **146**, 708 [1966]; H. G. WAHSWEILER, W. GREINER u. M. DANOS, Phys. Rev. **170**, 893 [1968].
- <sup>10</sup> W. GREINER in: Cargese Lectures in Physics, Vol. 3 [1969], ed. M. Jean, Gordon and Breach Science Publishers, New York.
- <sup>11</sup> H. FESHBACH, Ann. Phys. **5**, 357 [1958]; **19**, 287 [1962].
- <sup>12</sup> O. DÜRR, Quanten und Felder, Vieweg-Verlag Braunschweig 1971, Kap. Betrachtungen zur quantenmechanischen Beschreibung von Mehrteilchenreaktionen. H.-J. SCHEEFER: Diplomarbeit 1972, Institut für Theoretische Physik der J. W. Goethe-Universität Frankfurt.
- <sup>13</sup> W. ZICKENDRAHT, Ann. Phys. **35**, 18 [1965]; Y. u. A. SIMONOW, Sov. T. Nucl. Phys. **7**, 722 [1968] and references therein.
- <sup>14</sup> H. RUDER, Z. Naturforsch. **23a**, 579 und 562 [1968].
- <sup>15</sup> P. M. MORSE u. H. FESHBACH, Methods of Theoretical Physics, MIT-Press Cambridge, Mass., 1964; Chapt. 12.3.
- <sup>16</sup> L. M. DELVES, Nucl. Phys. **8**, 358 [1958]; **9** 391 [1958/59]; **20**, 275 [1960]; H. J. WEBER und W. GREINER, Z. Naturforsch. **24a**, (Heft 5) 736 [1969].
- <sup>17</sup> H. J. WEBER, Nuovo Cim. **61B**, 131 [1969].
- <sup>18</sup> A. LEJEUNE and C. MAHAUX, Nucl. Phys. **A145**, 613 [1970]. R. PETZOLD und A. GRAUEL, Z. Naturforsch., erscheint 1972. ROBSON, Nucl. Phys. **A184**, No. 2 [1972].
- <sup>19</sup> C. BLOCH, Nucl. Phys. **4**, 504 [1957].
- <sup>20</sup> A. H. WAPSTRA, Handbuch der Physik, Band **28**, Herausgeber: S. Flügge, Springer-Verlag Berlin 1958.
- <sup>21</sup> N. AUSTERN, Direct Nuclear Reactions Theories, Wiley-Interscience IX, New York 1970.
- <sup>22</sup> J. M. EISENBERG, B. M. SPICER u. M. E. ROSE, Nucl. Phys. **71**, 273 [1965].
- <sup>23</sup> H. J. WEBER, Ann. Physics **53**, 93 [1969]; **57**, 322 [1970].
- <sup>24</sup> A. MESSIAH, Quantum Mechanics, Vol. 1, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1969.
- <sup>25</sup> H. J. MANG u. H. A. WEIDENMÜLLER, Ann. Rev. Nucl. Sci. **18**, 1 [1968].